Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonio Avantaggiati

Sui sistemi ellittici del primo ordine a coefficienti costanti, in due variabili indipendenti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.6, p. 611–619.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_6_611_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 giugno 1963

Presiede il Presidente Gino Cassinis

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sui sistemi ellittici del primo ordine a coefficienti costanti, in due variabili indipendenti.* Nota di Antonio Avantaggiati, presentata (*) dal Corrisp. C. Miranda.

In questo lavoro mi occupo di un problema al contorno relativo ad un sistema ellittico di equazioni lineari alle derivate parziali, dello stesso tipo di quelli che ho già studiato in una precedente Memoria [1], ma nel caso, non considerato in quella trattazione, di due variabili. I risultati cui ora pervengo sono più completi soprattutto per il fatto che riesco, in questa circostanza, a determinare l'indice del suddetto problema. Nella esposizione mi servo, findove è possibile, delle stesse notazioni adoperate in quella occasione, nonché di altri risultati da me stabiliti relativi alla soluzione fondamentale del sistema considerato [2] ed allo studio di certe trasformazioni integrali singolari [3]; su ciò farò, pertanto, dei brevi richiami nel n. 1, dopo aver formulato il problema in esame. Il n. 2 è dedicato alla traduzione dello stesso

(*) Nella seduta del 13 giugno 1963.

(1) *Problemi al contorno per i sistemi ellittici simmetrici di equazioni lineari alle derivate parziali del prim'ordine a coefficienti costanti in* $m\ (\geq 3)$ *variabili indipendenti*, « Ann. di Mat. », vol. LXI (1963).

(2) *Sulla matrice fondamentale per i sistemi lineari ellittici del prim'ordine a coefficienti costanti in due variabili indipendenti*, « Boll. U.M.I. » (in corso di stampa).

(3) *Su di una classe di trasformazioni integrali singolari*, « Sem. Mat. Un. di Catania » (in corso di stampa).

in un sistema di equazioni integrali a valor principale e quindi a stabilire un teorema di esistenza. Nel n. 3 sotto una opportuna ipotesi determino l'indice del problema e dimostro la validità di tale ipotesi nel caso in cui il sistema di equazioni alle derivate parziali sia simmetrico.

1. Assegnati: un dominio piano T avente per contorno una sola curva [4], semplice, chiusa e dotata di curvatura continua; un ricoprimento aperto e finito di ∂T: $\{A\}_N$ mediante gli archi (aperti) $A_1, \cdots, A_N$ $(N > 2)$ con $A_k \subset \partial T$; in ogni punto $\eta \in A_k$ e per ogni $k = 1, \cdots, N$ una matrice $\mathbf{C}^{(k)}(\eta) = \| c_{r,s}^{(k)}(\eta) \|$ ad n righe e $2n$ colonne ed un vettore $c^{(k)}(\eta) = (c_{1,0}^{(k)}(\eta), \cdots, c_{n,0}^{(k)}(\eta))$; determinare $2n$ funzioni $u_1, \cdots, u_{2n}$ che su ciascun A_k verifichino le condizioni

$$(1.1) \qquad \sum_{s=1}^{2n} c_{r,s}^{(k)}(\eta)\, u_s(\eta) = c_{r,0}^{(k)}(\eta) \qquad \text{per } r = 1, \cdots, n,$$

ed in $T - \partial T$ il sistema di equazioni alle derivate parziali

$$(1.2) \qquad \sum_{s=1}^{2n} \sum_{p=1}^{2} a_{rs}^{p} \frac{\partial u_s(x)}{\partial x_p} = f_r(x) \qquad \text{per } r = 1, \cdots, 2n.$$

Si suppone:

(i_1) per ogni $l \neq k$ $A_l \cap A_k$ è non vuoto se e soltanto se o $k = l+1$ o $k = l-1$ essendo per convenzione $A_{N+p} \equiv A_p$ per ogni intero p;

(i_2) su ogni arco del tipo $A_l \cap A_{l+1}$ è definita una matrice quadrata di ordine n: $\Gamma^{(l,l+1)} = \| \gamma_{r,s}^{(l,l+1)} \|$ non degenere in alcun punto, la cui inversa è indicata con $\Gamma^{(l+1,l)}$ tale che si abbia

$$(1.3) \qquad c_{r,s}^{(l)} = \sum_{t=1}^{n} \gamma_{r,t}^{(l,l+1)} c_{ts}^{(l+1)}$$

per ogni $r = 1, \cdots, n$ ed $s = 0, 1, \cdots, 2n$;

(i_3) le $a_{r,s}^{p}$ sono tutte costanti reali e tali che

$$a(\lambda) = \det.\, \boldsymbol{a}(\lambda) \neq 0$$

per ogni $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ tale che $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, avendo posto

$$\boldsymbol{a}(\lambda) = \| a_{rs}(\lambda) \| \quad , \quad a_{r,s}(\lambda) = a_{r,s}^{1} \lambda_1 + a_{r,s}^{2} \lambda_2 .$$

Supporremo che f_r e $c_{r,s}^{(k)}$ siano a valori reali o complessi, $\gamma_{rs}^{(l,l+1)}$ a valori reali epperò $f_r \in C^{(0,\alpha)}(T)$, $c_{r,s}^{(k)} \in C^{(0,1)}(A_k)$, $\gamma_{r,s}^{(l,l+1)} \in C^{(0,\alpha)}(A_l \cap A_{l+1})$ per ogni $r = 1, \cdots, n$; $s = 0, 1, \cdots, 2n$; $k = 1, \cdots, N$; cercheremo le u_r reali o complesse nella classe $C^{(0,\alpha)}(T) \cap C^{(1)}(T - \partial T)$.

Giungeremo ad un teorema di esistenza per il nostro problema riconducendolo a quello della inversione di una trasformazione di uno spazio di Banach B_1 in un altro B_2, tali spazi essendo del tipo che definiremo qui di seguito [5].

(4) Ci limitiamo al caso del dominio ad unico contorno e per non appesantire le notazioni e perché abbiamo rilevato che il dominio a più contorni comporta solo varianti formali.

(5) Per qualche dettaglio sulla struttura di questi spazi cfr. loc. cit. in (3), n. 1.

Fissati il ricoprimento $\{A\}_N$ e l'insieme delle matrici $\{\Gamma\}_{A,n}$ di cui alle condizioni (1.3), sia $[C^{(0,\alpha)}(A_k)]^n$ l'insieme dei vettori ad n componenti, reali o complesse, ciascuna di classe $C^{(0,\alpha)}(A_k)$ e $\mathcal{C}^{(0,\alpha)}(A, n) = [C^{(0,\alpha)}(A_1)]^n \times \cdots \times [C^{(0,\alpha)}(A_N)]^n$ il loro prodotto combinatorio; indicheremo $C^{(0,\alpha)}(\{\Gamma\}_{A,n})$ il sottoinsieme di $\mathcal{C}^{(0,\alpha)}(A, n)$ tale che ogni suo elemento, indicato genericamente con la notazione $((\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(N)}))$, per mettere in risalto che $\varphi^{(k)} \in [C^{(0,\alpha)}(A_k)]^n$, verifica la condizione

$$\varphi^{(l)} = \Gamma^{(l,l+1)} \cdot \varphi^{(l+1)} \qquad \text{su } A_l \cap A_{l+1} \tag{1.4}$$

per ogni $l = 1, \cdots, N$. Introdotta in $\mathcal{C}^{(0,\alpha)}(A, n)$ la struttura consueta di spazio lineare e normato, si verifica facilmente che $C^{(0,\alpha)}(\{\Gamma\}_{A,n})$ è, rispetto a tale struttura (con la quale, d'altra parte, sarà sempre considerato in seguito), uno spazio di Banach, cioè: lineare, normato e completo.

In modo analogo, ma supponendo le componenti dei vettori, funzioni di quadrato sommabile, si definisce lo spazio $L^{(2)}(\{\Gamma\}_{A,n})$ richiedendo, però, com'è naturale, che le condizioni (1.4) siano verificate quasi ovunque su $A_l \cap A_{l+1}$. Se poi si indica con $\Gamma^{*(l,l+1)}$ la matrice trasposta della inversa di $\Gamma^{(l,l+1)}$ con $C^{(0,\alpha)}(\{\Gamma^*\}_{A,n})$ ed $L^{(2)}(\{\Gamma^*\}_{A,n})$ si denoteranno gli spazi definiti come i precedenti ma relativamente alle matrici $\Gamma^{*(1,2)}, \cdots, \Gamma^{*(N,N+1)}$.

Detti $a^{r,s}(\lambda)$ gli elementi della matrice inversa di $\boldsymbol{a}(\lambda)$, poniamo

$$\mu_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^{j,k}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\cos\theta\, d\theta ;$$

$$\nu_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a^{j,k}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta ;$$

$$\alpha_{j,k} = \sum_{r=1}^{2n} (\mu_{j,r}\, a^1_{r,k} + \nu_{jr}\, a^2_{rk})$$

$$M_{rs}(x-y) = M_{rs}(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = \sum_{t=1}^{2n} \alpha_{r,t}\, a^{t,s}(-x_2 + y_2, x_1 - y_1).$$

Si dimostra(6) che $\| M_{rs}(x-y) \|$ è una matrice fondamentale del sistema (1.2) e che le funzioni

$$u_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_T \sum_{r=1}^{2n} M_{tr}(x-y) f_r(y)\, dy \qquad r = 1, \cdots, 2n$$

costituiscono una soluzione del sistema (1.2) di classe $C^{(0,\alpha)}(T) \cap C^{(1)}(T - \partial T)$.

2. Per affrontare lo studio del problema consideriamo un sistema di matrici dello stesso tipo di $\{\Gamma\}_{A,n}$ che indichiamo con $\{\Theta\}_{A,n}$ lasciando, per

(6) Cfr. loc. cit. in (2) proposizioni A, B e (2.2).

il momento, indeterminate le $\Theta^{(l,l+1)}$ epperò consideriamo gli spazi $C^{(0,\alpha)}(\{\Theta\}_{A,n})$, $L^{(2)}(\{\Theta\}_{A,n})$ ecc. Facciamo una decomposizione di ∂T mediante gli archi, chiusi, $D_1, \cdots, D_N$ con $D_k \subset A_k$ ed una N–pla di matrici $\| d_{r,s}^{(k)} \|$ ciascuna ad n righe e $2n$ colonne, tale che posto $d_{\cdot s}^{(k)} = (d_{1,s}^{(k)}, \cdots, d_{n,s}^{(k)})$ la N–pla $((d_{\cdot s}^{(1)}, \cdots, d_{\cdot s}^{(N)}))$ sia un elemento di $C^{(0,\alpha)}(\{\Theta\}_{A,n})$ per ogni $s = 1, \cdots, 2n$; detto $\varphi = ((\varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(N)}))$ un qualunque elemento di $C^{(0,\alpha)}(\{\Theta^*\}_{A,n})$ consideriamo le funzioni

$$(2.1) \qquad u_t(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N} \int_{D_k} \sum_{s=1}^{2n} M_{ts}(\eta - x) \left[\sum_{r=1}^{n} d_{r,s}^{(k)}(\eta)\, \varphi_r^{(k)}(\eta) \right] d_\eta s + u_t'(x).$$

Si riconosce [7] che le (2.1) definiscono per ogni fissato φ, $2n$ funzioni di classe $C^{(0,\alpha)}(T) \cap C^{(1)}(T - \partial T)$, che non dipendono dalla particolare decomposizione fatta di ∂T; siccome poi $\mathbf{M}(x - y)$ è una matrice fondamentale si deduce che tali funzioni verificano il sistema (1.2) in $T - \partial T$. Se imponiamo a queste di soddisfare alle condizioni al contorno (1.1), in un generico punto ξ interno a D_k otteniamo il seguente sistema di equazioni integrali singolari [8]

$$(2.2) \qquad \sum_{t=1}^{2n} a_{r,t}^{(k,k)}(\xi, \xi)\, \varphi_t^{(k)}(\xi)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{2n} \int_{D_h} \sum_{j,l}^{1,\cdots,2n} \sum_{t=1}^{n} M_{jl}(\eta - \xi)\, c_{r,j}^{(k)}(\xi)\, d_{t,l}^{(h)}(\eta)\, \varphi_t(\eta)\, d_\eta s = g_r^{(k)}(\xi),$$

nelle incognite $\varphi_t^{(k)}$, ove si è posto

$$(2.3) \qquad a_{r,s}^{(h,k)}(\xi, \eta) = \sum_{j,l}^{1,\cdots,2n} a^{j,l}[n(\xi)]\, c_{r,j}^{(h)}(\xi)\, d_{s,l}^{(k)}(\eta)$$

$$(2.3) \qquad g_r^{(k)}(\xi) = 2 \left[c_{r,0}^{(k)}(\xi) - \sum_{t=1}^{2n} c_{r,t}^{(k)}(\xi)\, u_t'(\xi) \right],$$

e si sono indicati con $n_p(\xi)$ i coseni direttori della normale *a* ∂T in ξ orientata verso l'interno di T.

Data l'arbitrarietà con cui si può fissare la decomposizione $D_1, \cdots, D_N$ di ∂T le (2.2) possono intendersi in ogni punto $\xi \in A_k$.

Per studiare il sistema (2.2) ne determineremo dapprima la parte predominante. A tale scopo sul piano Π cui appartiene il dominio T, rappresentiamo il corpo dei numeri complessi al solito modo, e se $\xi, \eta, z, \cdots$ sono punti di Π con le stesse lettere indichiamo i numeri complessi di cui i detti punti sono le affisse. Fissiamo il verso di $+\partial T$, in modo che la coppia di rette orientate *tangente*, *normale interna* sia congruente a quella degli assi coordinati; su ogni arco contenuto in ∂T considereremo il verso concorde

(7) Cfr. loc. cit. in (3) proposizione (1, *a*).
(8) Cfr. loc. cit. in (2), formule (1.4) e (2.13).

con questo; ove occorra, perciò, gli archi D_k, A_k, ecc. saranno muniti di quel verso, salvo avviso del contrario.

Se supponiamo che in un intorno del punto $\xi \in A_k$ le equazioni parametriche di A_k in funzione di una ascissa curvilinea s si scrivono

$$\eta_p = \eta_p(s) \quad \text{con} \quad \eta_p(s_0) = \xi_p \qquad \text{per } p = 1, 2,$$

si può dimostrare che

$$(2.4)\quad M_{j,l}(\eta_1 - \xi_1, \eta_2 - \xi_2) = M_{j,l}(\eta_1'(s_0), \eta_2'(s_0)) \frac{\eta_1'(s) + i\eta_2'(s)}{\eta_1(s) - \eta_1(s_0) + i[\eta_2(s) - \eta_2(s_0)]} + O(1).$$

Infatti, poiché le $M_{j,l}$ sono omogenee di grado -1, si ha

$$\lim_{s \to s_0} M_{j,l}(\eta_1(s) - \eta_1(s_0), \eta_2(s) - \eta_2(s_0)) \{\eta_1(s) - \eta_1(s_0) + i[\eta_2(s) - \eta_2(s_0)]\}$$
$$= M_{j,l}(\eta_1'(s_0), \eta_2'(s_0)) \{\eta_1'(s_0) + i\eta_2'(s_0)\}.$$

Da questa segue facilmente la (2.4), sfruttando il fatto che le η_p' sono derivabili e che per ogni coppia di punti λ e λ' tali che $|\lambda| = |\lambda'| = 1$ si ha

$$M_{j,l}(\lambda) - M_{j,l}(\lambda') = O(|\lambda - \lambda'|).$$

Posto quindi

$$R_{r,s}^{(h,k)}(\xi, \eta) = \frac{1}{\eta_1'(s) + i\eta_2'(s)} \sum_{j,l}^{1,\dots,2n} M_{j,l}(\eta - \xi)\, c_{r,j}^{(h)}(\xi)\, d_{l,s}^{(k)}(\eta)$$
$$- b_{r,s}^{(h,k)}(\xi, \eta) \frac{1}{\eta - \xi}$$

con

$$b_{r,s}^{(h,k)}(\xi, \eta) = \sum_{j,l}^{1,\dots,2n} M_{j,l}(\eta_1'(s), \eta_2'(s))\, c_{rj}^{(h)}(\xi), \, d_{sl}^{(h)}(\eta)$$
$$= \sum_{j,l}^{1,\dots,2n} \sum_{q=1}^{n} \alpha_{jq}\, a^{q,l}[n(\xi)]\, c_{r,j}^{(h)}(\xi)\, d_{s,l}^{(k)}(\eta)$$

ed

$$\eta - \xi = (\eta_1 - \xi_1) + i(\eta_2 - \xi_2),$$

si ricava che i nuclei $R_{r,t}^{(h,k)}$ sono limitati e che il sistema di equazioni integrali si può mettere sotto la seguente forma

$$(2.5)\qquad \sum_{t=1}^{n} a_{r,t}^{(k,k)}(\xi)\, \varphi_t^{(k)}(\xi) + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{N} \int_{D_h} \frac{\sum_{t=1}^{n} b_{r,t}^{(k,k)}(\xi, \eta)\, \varphi_t^{(h)}(\eta)}{\eta - \xi}\, d\eta$$
$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{N} \int_{D_h} \sum_{t=1}^{n} R_{r,t}^{(k,h)}(\xi, \eta)\, \varphi_t^{(h)}(\eta)\, d\eta = g_r^{(k)}(\xi).$$

Ci sarà anche comodo scrivere sinteticamente il sistema (2.5) nel modo seguente

$$(2.5)\qquad \mathcal{S}(\varphi) + \mathfrak{R}(\varphi) = g.$$

Allora $\mathfrak{S}$ ed $\mathfrak{R}$ indicano le trasformazioni funzionali che ad ogni elemento φ di $C^{(0,\alpha)}(\{\Theta^*\}_{A,n})$ fanno corrispondere gli elementi di $C^{(0,\alpha)}(\{\Gamma\}_{A,n})$ le cui componenti relative ad A_k sono rispettivamente la somma dei primi due termini a primo membro della (2.5) ed il terzo termine. Con le stesse lettere $\mathfrak{S}$ ed $\mathfrak{R}$ intenderemo i loro prolungamenti [9] in $L^{(2)}(\{\Theta^*\}_{A,n})$ i quali avranno il codominio in $L^{(2)}(\{\Gamma\}_{A,n})$. $\mathfrak{R}$ essendo definita da nuclei limitati, risulta lineare e completamente continua; $\mathfrak{S}$ rientra in una classe di trasformazioni che abbiamo già studiato [10]. Sussiste il

TEOREMA (2.1). – *Se per ogni* $h = 1, \cdots, N$ *e qualunque sia* $\xi \in A_h$ *si ha*

$$\text{(2.6)} \qquad \det. \left\| \sum_{j,l}^{1,\cdots,2n} \sum_{q=1}^{2n} (\delta_{j,q} + i\alpha_{j,q})\, a^{q,l}[n(\xi)]\, c^{(h)}_{r,j}(\xi)\, d^{(h)}_{t,l}(\xi) \right\| \neq 0$$

$$\text{(2.6')} \qquad \det. \left\| \sum_{,l}^{1,\cdots,2n} \sum_{q=1}^{2n} (\delta_{j,q} - i\alpha_{j,q})\, a^{ql}[n(\xi)]\, c^{(h)}_{k,j}(\xi)\, d^{(h)}_{t,l}(\xi) \right\| \neq 0 .$$

I) *L'omogeneo associato al sistema* (2.5) *ed il suo aggiunto hanno al più un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti; siano indicati con* k *e* k^* *rispettivamente.*

II) *Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema* (2.5) *sia risolubile è che* $((g^{(1)}, \cdots, g^{(N)}))$ *sia ortogonale a* k^* *soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo trasposto associato al* (2.5).

III) *Indicato con* $J(c, d) = k - k^*$ *l'indice della trasformazione* $\mathfrak{S} + \mathfrak{R}$ *si ha*

$$\text{(2.7)} \qquad J(c, d) = \frac{1}{2\pi}\,[\arg.\, G(\xi)]_{+\partial T}$$

essendo G *la funzione* (continua su ∂T) *definita dalla relazione*

$$G(\xi) = \frac{\det. \left\| \sum_{j,l}^{1,\cdots,2n} \sum_{q=1}^{2n} (\delta_{j,q} - i\alpha_{j,q})\, a^{q,l}[n(\xi)]\, c^{(h)}_{rj}(\xi)\, d^{(h)}_{s,l}(\xi) \right\|}{\det. \left\| \sum_{j,l}^{1,\cdots,2n} \sum_{q=1}^{2n} (\delta_{j,q} + i\alpha_{j,q})\, a^{q,l}[n(\xi)]\, c^{(h)}_{r,j}(\xi)\, d^{(h)}_{s,l}(\xi) \right\|}$$

in ogni punto ξ *appartenente ad* A_h *per ciascun* $h = 1, \cdots, N$; *la parentesi* $[\cdots]_{+\partial T}$ *stando ad indicare la variazione che subisce una determinazione localmente continua della funzione racchiusa, quando il punto* ξ *descrive* $+\partial T$ *tutta intera una sola volta.*

IV) *Se* $J(c, d)$ *è non negativo il sistema* (2.5) *è equivalente* [11] *ad un sistema di equazioni integrali del tipo di Fredholm di seconda specie.*

Infatti le condizioni (2.6) e (2.6') assicurano [12] che $\mathfrak{S}$ è a codominio chiuso e che hanno dimensione finita le varietà lineari costituite dalle soluzioni della

(9) Per le dovute precisazioni riguardanti questa questione cfr. loc. cit. in (3), n. 2.

(10) Cfr. loc. cit. in (3); si tratta proprio delle trasformazioni studiate in questo lavoro.

(11) Intendiamo dire cioè che esiste un sistema di equazioni integrali del tipo di Fredholm, di seconda specie, risolubile quando e soltanto quando lo è il (2.5), e se ciò si verifica ogni soluzione dell'uno è tale anche per l'altro.

(12) Cfr. loc. cit. in (3), teorema (2.1).

equazione $\mathcal{S}(\varphi) = 0$ e della aggiunta di questa. Poiché $\mathcal{R}$ è completamente continua, lo stesso risultato si estende alla trasformazione $\mathcal{S} + \mathcal{R}$, ciò dimostra la validità delle proposizioni I) e II). Per quanto concerne la III) basta tener presente [13] che l'indice di $\mathcal{S} + \mathcal{R}$, nelle condizioni in cui ci siamo posti, coincide con quello di $\mathcal{S}$, e pertanto è fornito proprio dalla (2.7). La proposizione IV) è una immediata applicazione di un teorema generale della teoria delle trasformazioni riducibili [14], ben noto, del resto, nel caso delle ordinarie equazioni integrali singolari col nucleo di Cauchy.

Vogliamo rilevare esplicitamente che, fino a questo momento le eventuali soluzioni del sistema (2.5) vengono individuate come elementi di $L^{(2)}(\{\Theta^*\}_{A,n})$. Che queste poi, nelle ipotesi fatte, se esistono, sono anche elementi dello spazio $C^{(0,\alpha)}(\{\Theta^*\}_{A,n})$ segue dal fatto che devono essere anche soluzioni di un sistema di equazioni integrali del tipo di Fredholm di seconda specie con termini noti di classe $C^{(0,\alpha)}$, come si deduce facilmente *riducendo* il sistema.

3. È ovvio che il teorema dimostrato al numero precedente fornisce delle condizioni che assicurano l'esistenza di soluzioni del nostro problema. Si impone perciò un confronto fra questo ed il sistema (2.5) per esaminare se ci sono casi in cui essi sono equivalenti, nel senso che quando e solo quando è risolubile l'uno lo è pure l'altro. A tale scopo si può sfruttare il fatto che fino a questo momento le funzioni $d_{r,s}^{(k)}$ sono rimaste indeterminate, fondandosi sulla seguente ipotesi

(i_4) Esistono un sistema di matrici $\{\Theta\}_{A,n}$ e delle $d_{r,s}^{(k)}$ tali che

a) per il problema che si ottiene sostituendo nelle (1.1) $d_{r,s}^{(k)}$ a $c_{r,s}^{(k)}$ per ogni $r = 1, \cdots, n$; $s = 1, \cdots, 2n$; $k = 1, \cdots, N$ valga il teorema di unicità ;

b) il sistema di equazioni integrali che si ottiene dal (2.5) ponendo $d_{r,s}^{(k)}$ al posto di $c_{r,s}^{(k)}$ abbia una ed una sola soluzione qualunque siano i termini noti.

Infatti se è verificata tale ipotesi le formule (2.1) con quella accezione delle funzioni $d_{r,s}^{(k)}$ *forniscono una rappresentazione integrale, univoca, di tutte le soluzioni del sistema di equazioni alle derivate parziali* (1.2). In queste condizioni il nostro problema è equivalente al sistema (2.5) ed anzi il suo indice è uguale a quello della trasformazione $\mathcal{S} + \mathcal{R}$. Si ha perciò il seguente

TEOREMA (3.1). – *Se è verificata l'ipotesi* i_4) *il problema posto al* n. 1 *è equivalente al sistema* (2.5) ; *perciò quando siano soddisfatte le ipotesi del teorema* (2.1) *l'indice del problema è dato dalla* (2.7).

È indispensabile, ci pare, individuare dei casi in cui l'ipotesi i_4) è verificata.

(13) Cfr. G. FICHERA, *Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari*, « Rend. di Mat. e delle sue Appl. » (1958), Cap. III teorema XXXVIII; quella dimistrazione infatti, si può adattare anche al caso in cui si tratti di trasformazioni di uno spazio di Banach B_1 in un altro B_2.

(14) Si può consultare per esempio, il lavoro citato in [13], teorema XXIX, oppure S. G. MIHLIN, *Two theorems on regularizers*, « Dokl. Akad. Nauk SSSR », 125 (1959).

Si supponga il sistema (1.2) simmetrico $(a^p_{r,s} = a^p_{s,r})$ e che le radici dell'equazione

$$\text{det.} \, \| a^1_{r,s} \, n_1(\xi) + a^2_{r,s} \, n_2(\xi) + \delta_{rsl} \| = 0 \tag{3.1}$$

abbiano ordine di molteplicità costante al variare di ξ su ∂T [15].

In queste ipotesi si dimostra che [16]

c) su ogni A_k si possono definire due matrici $\| d^{(k)}_{r,s} \|$ e $\| d'^{(k)}_{r,s} \|$ ad n righe e $2n$ colonne, i cui elementi sono di classe $C^{(0,\alpha)}(A_k)$ in modo che si abbia

$$\sum_{r,s}^{1,\cdots,2n} (a^1_{r,s} \, n_1(\xi) + a^2_{r,s} \, n_2(\xi)) \, \Lambda_r \Lambda_s$$

$$= \sum_{l=1}^{2n} \left\{ \rho_l(\xi) \left(\sum_{j=1}^{2n} d^{(k)}_{l,j}(\xi) \, \Lambda_j \right)^2 + \rho'_l(\xi) \left(\sum_{j=1}^{2n} d'^{(k)}_{l,j}(\xi) \, \Lambda_j \right)^2 \right\}$$

per ogni $\xi \in A_k$ e qualunque siano $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_{2n}$ ed avendo indicato con ρ_l le radici positive della (3.1) e con ρ'_l quelle negative [17];

d) in ogni arco $A_l \cap A_{l+1}$ resta definita una matrice quadrata di ordine n: $\Theta^{(l,l+1)} = \| \theta^{(l,l+1)}_{r,s} \|$ tale che si abbia

$$d^{(l)}_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} \theta^{(l,l+1)}_{r,t} \, d^{(l+1)}_{t,s} \, .$$

Le proposizioni *c*) e *d*) non sono che un caso particolare di un teorema da noi dimostrato in un precedente lavoro [18]. In verità con quel teorema si perviene alla determinazione di certe $d^{(k)}_{r,s}$ definite su degli archi B_k che costituiscono un ricoprimento, in generale, diverso da quello fissato per il problema. Con opportuni accorgimenti, però, ci si può sempre ricondurre allo stesso ricoprimento $\{A\}_N$ [19].

Si può così far vedere che per il problema che si ottiene ponendo nelle (1.1) le $d^{(k)}_{rs}$, di cui alla proposizione *c*), sussiste il teorema di unicità e che le formule (2.1), in conseguenza, forniscono una rappresentazione integrale univoca di tutte e soltanto le soluzioni del sistema (1.2). Infatti il sistema di equazioni integrali che si ottiene trattando questo particolare problema con lo stesso procedimento adoperato per il caso generale, e usando queste stesse

(15) Questa ipotesi è senz'altro verificata se la matrice $a(\lambda)$ è ortosimmetrica per $|\lambda| = 1$; cfr. loc. cit. in (1), teorema (9.1). Notiamo esplicitamente che il sistema (1.2), se è simmetrico, è anche autoaggiunto.

(16) Cfr. loc. cit. in (1), n. 6. Avvertiamo che pur essendoci limitati in quel lavoro a considerare il caso in cui il numero delle variabili indipendenti è maggiore di due, i risultati del citato n. 6 sono validi anche nel caso attuale.

(17) L'equazione (3.1) ha, infatti, n radici positive ed altrettante negative, cfr. loc. cit. in (1), teorema (6.1).

(18) Cfr. loc. cit. in (1), n. 6, teorema (6.3).

(19) Basta, infatti, sfruttare la nozione di equivalenza tra spazi del tipo $C^{(0,\alpha)}(\{\Gamma\}_{A,n})$, cfr. loc. cit. in (3), n. 1.

$d_{rs}^{(k)}$ nelle (2.1), verifica le ipotesi del teorema (2.1) e anzi si dimostra che $k = k^* = 0$ [20].

Tenendo presente l'osservazione fatta precedentemente si può concludere col

TEOREMA (3.2). – *Se il sistema di equazioni differenziali* (1.2) *è simmetrico e le radici dell'equazione* (3.1) *hanno ordine di molteplicità costante al variare di* ξ *su* ∂T, *il problema posto nel* n. 1 *è equivalente al sistema di equazioni integrali* (2.5), *dove le* $d_{r,s}^{(k)}$ *hanno il significato loro fornito dalla proposizione* c). *Perciò se le* $c_{r,s}^{(k)}$ *verificano l'ipotesi del teorema* (2.1) *l'indice del problema è dato dalla* (2.7).

(20) Cfr. loc. cit. in (1), n. 7 ed applicare i procedimenti ivi adoperati; il fatto che ora si abbia a che fare con funzioni a valori complessi comporta solo qualche accorgimento del tutto banale.