Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Terracini

Commemorazione del Corrispondente Beppo Levi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.5, p. 590–606.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_5_590_0¿

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Corrispondente Beppo Levi

tenuta dal Socio ALESSANDRO TERRACINI

Nel 1956, quando l'Accademia dei Lincei conferì a Beppo Levi il premio Antonio Feltrinelli per la matematica riservato a cittadini italiani, fu espressamente asserito che questo voleva essere un meritato riconoscimento del valore dei risultati da lui conseguiti, e costituire il coronamento di una lunga e nobile carriera. Ora ben si può dire che parole di questo genere raramente furono usate con maggior giustificazione. Veramente fu quella di Beppo Levi una lunga e nobile carriera; egli onorò la matematica durante tutta la sua lunga vita, in tutti i momenti di questa, sia che – in anni ormai molto lontani – egli abbia svolto la propria attività come professore nelle scuole secondarie, sia nel suo insegnamento universitario, come assistente dapprima, e poi come professore nelle università di Torino, e poi di Cagliari, e poi di Parma, e poi di Bologna, e poi ancora – quando fu allontanato dall'insegnamento nelle università italiane – nell'Universidàd del Litoral, a Rosario, in Argentina, dove rimase nell'ultimo periodo della vita, continuando a onorare la matematica nell'insegnamento e nell'opera di diffusione del pensiero matematico, che egli svolse come direttore dell'Istituto Matematico di quell'Università, e nelle conversazioni con le persone con le quali veniva a contatto.

Quanto alla prima parte della motivazione che ho ricordato, dove si allude all'importanza dei risultati conseguiti da Beppo Levi, pur trattandosi di un'affermazione perfettamente fondata, sarei portato a pensare che essa non sia stata la più gradita a Levi. La matematica, secondo lui – e lo ha espressamente affermato più di una volta, per esempio nella sua presentazione della Rivista «Mathematicae Notae» – è essenzialmente un modo di pensare; sebbene essa sia una scienza nel senso ordinario delle scienze positive, cioè un sistema di conoscenze, e sebbene essa interessi coloro che l'applicano come uno strumento potente, essa è essenzialmente un modo di pensare; è una filosofia. Anche in altre occasioni ha sostenuto che l'essenza della matematica non è costituita dal numero, bensì dal pensiero; e nelle scienze che applicano la matematica quello che è caratteristico non è, secondo lui, la possibilità di introdurre i numeri oppure un certo formalismo, ma è il pensiero: non corrispondono al termine «matematica» le formule empiriche o di

(*) Nella seduta dell'11 maggio 1963.

osservazione che possono trovarsi nei libri di fisica. Anche nelle applicazioni statistiche a teorie fisiche, il problema dominante non è costituito dai numeri, bensì dalla ricerca di ipotesi che caratterizzino convenientemente la parola vaga di « probabilità ».

Si capisce dunque che per lui non fosse generalmente in vista il risultato singolo, ma il fatto che esso fosse un prodotto del pensiero matematico. E, se nel passare in rassegna l'opera scientifica di Beppo Levi, dovremo forzatamente intrattenerci, sia pur brevemente, su risultati da lui ottenuti in qualcuno dei vari campi che ha studiato, desideriamo affermare esplicicitamente che per lui non erano tanto questi risultati che avevano valore, quanto la circostanza di essere frutti del pensiero matematico.

Non occorre dire che il punto di vista tratteggiato si rifletteva anche nell'insegnamento: certamente a Beppo Levi si applicano le parole che alcuni anni or sono sono state scritte per tutt'altro scopo: « il valore del maestro, più ancora che nella verità che scopre, sta nell'addestramento che porge alla scoperta ».

Beppo Levi è nato a Torino il 14 maggio 1875 (1), quarto di dieci fratelli. Due di essi morirono nella prima guerra mondiale: Decio, ingegnere e maggiore nell'esercito, cadde sul campo presso Gorizia il 15 agosto 1916, ed Eugenio Elia Levi, eminente matematico, professore nell'Università di Genova, volontario di guerra, capitano del genio, cadde in azione, durante la ritirata di Caporetto, il 28 ottobre di quello stesso anno.

Beppo Levi studiò matematica nell'Università di Torino, seguendo i corsi di professori a cui restò poi a lungo legato: Corrado Segre, Giuseppe Peano, Vito Volterra, Enrico D'Ovidio, di alcuni dei quali sentì lungamente l'influenza.

Si laureò nel 1896 con una tesi preparata sotto la guida di Corrado Segre, la quale segnò il suo iniziale orientamento verso la Geometria algebrica, e tra l'altro diede poi origine all'ampia Memoria *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica* pubblicata due anni dopo [5]. Nello stesso anno 1896 divenne, a Torino, assistente alla cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva, coperta allora da Luigi Berzolari. E più tardi – dopo una breve parentesi alla quale ho già accennato, di professore nelle scuole secondarie – fu professore di Geometria proiettiva e descrittiva nell'Università di Cagliari dal 1906 al 1910; di Analisi algebrica all'Università di Parma dal 1910, e poi di Elementi della teoria delle funzioni in quella di Bologna dal 1928; e di questa stessa Università – diciamo subito per concludere con la sua carriera universitaria italiana – dal 1951, collocato ormai a riposo, fu professore emerito. Ma dal 1939 alla morte, avvenuta il 28 agosto 1961, si svolse il periodo argentino della sua vita. Nonostante il dolore che egli non poteva non provare per l'allontanamento dalla propria cattedra italiana – dolore che forse in lui, sensibile ad una certa forma di nazionalismo, doveva essere più

(1) Figlio dell'avvocato Giulio Giacomo Levi, e della signora Mentina Levi Pugliese.

pungente – giunse in Argentina pieno di entusiasmo per le sue nuove mansioni, e vi si buttò con tutta l'anima, organizzando l'Istituto matematico dell'Università del Litoral, del quale assunse la direzione, e tenendo corsi, distinti da quelli ufficiali, sugli argomenti più svariati, finché più tardi assunse anche insegnamenti regolari, come quello di Geometria analitica e di Calcolo infinitesimale II, e poi quello di Meccanica razionale. Intanto intraprendeva una serie di pubblicazioni di quell'Istituto, come le « Publicaciones », le « monografías », e soprattutto la Rivista «Mathematicae Notae», con la quale egli trovò modo di estendere la propria benefica azione anche al di là di quelli che gli erano vicini, a Rosario, in tutta l'Argentina, in tutto il mondo ispano–americano, e ben si può dire ovunque. Questa Rivista, egli scriveva nel presentarla « si rivolge in primo luogo agli allievi della Facoltà alla quale l'Istituto è collegato, ma spera di trovare qualche simpatia anche al di là, presso giovani che per la prima volta si avvicinano a questo ramo cosí singolare del sapere : singolare (egli spiega) per la posizione della matematica come modo di pensare, e qui continua con le parole che ho già avuto occasione di ricordare prima. E prosegue dicendo che la Rivista si propone di destare interesse per il pensiero matematico, e di pubblicare articoli semplici, senza pretesa di ricerche in campi elevati, e spesso articoli didattici.

Il pensiero di questa Rivista, per molti anni, lo dominò durante molte ore dalla sua vita. Così nel periodo di cui l'esistenza della Rivista gli era fonte di preoccupazione nella situazione generale del Paese dove egli viveva, e nelle ripercussioni in campo universitario. Così anche, in un altro difficile periodo, quando egli interrompeva l'affettuosa, premurosissima, continua assistenza che dava a una persona a lui cara, gravemente ammalata, unicamente per tornare col pensiero da Torre Pellice – dove era venuto in quei mesi – a Rosario, dove la sua Rivista doveva continuare, e continuava.

Come ho già ricordato, Beppo Levi si presentò alla laurea con una dissertazione discussa da Corrado Segre. È da ritenere che essa concernesse alcuni argomenti diversi, sia pure connessi tra loro.

Uno riguarda certamente la varietà delle corde di una curva algebrica, come è detto esplicitamente nella Memoria omonima pubblicata un paio d'anni dopo.

D'altro lato è da ricordare che in quel torno di tempo Corrado Segre stava studiando la scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche estendendo alle superficie (non facile estensione) quanto aveva fatto Noether per le singolarità delle curve piane algebriche. Su quell'argomento Segre scrisse una Memoria (2), pubblicata negli «Annali di Matematica», diventata presto classica, alla fine della quale egli aggiunge i propri ringraziamenti a Beppo Levi, e accenna alla sua tesi di laurea dedicata – egli dice – alle singolarità delle curve algebriche sghembe (iperspaziali). La connessione tra i

(2) CORRADO SEGRE, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superfici algebriche*, «Ann. di Mat.», (2) XXV, pp. 1–54 (1897), (cfr. *Opere*, t. I, pp. 327–379).

due argomenti è chiara: si chiamano notoriamente corde improprie di una linea algebrica appartenente, supponiamo, allo spazio ordinario le rette che sono posizioni limiti di corde i cui due punti di appoggio sono venuti a coincidere in uno stesso punto O. Se O è semplice, tutto è ovvio: non così quando O è multiplo. Appunto questo caso è approfondito da Beppo Levi.

Ma intanto l'aver fissato la propria attenzione sui punti multipli nello spazio portava fatalmente Levi a metter la mano su un problema considerato come fondamentale.

Il punto di partenza per l'impostazione di tale problema è fornito da un teorema sulle curve piane algebriche, che è effettivamente fondamentale nella teoria di queste curve e che afferma la possibilità di ottenere ogni curva piana algebrica senza componenti multiple come trasformata birazionale di un'altra avente soli punti multipli ordinari: si potrebbe anche dire che la curva data è birazionalmente equivalente ad una curva dello spazio priva di singolarità.

Il ruolo fondamentale disimpegnato da questo teorema nella geometria su una curva algebrica, in quanto consente di ridursi allo studio delle sole curve algebriche piane con singolarità ordinarie, non poteva non far apparire un teorema analogo per le superficie come il presupposto sostanziale per lo studio della geometria su una superficie algebrica. La questione appariva nel suo carattere fondamentale proprio in quegli anni, nei quali Castelnuovo ed Enriques svolgevano la loro opera appunto a costruire la geometria su una superficie con quei metodi geometrici che nella cosidetta scuola geometrica italiana vennero affermandosi potentemente.

Il problema è visto ed enunciato con tutta chiarezza da Corrado Segre nella sua Memoria degli «Annali»: egli comincia col definire che cosa è da intendere come singolarità ordinaria di una superficie algebrica dello spazio ordinario.

Allora il problema fondamentale che si pone è quello di trasformare birazionalmente una superficie algebrica qualunque (priva di parti multiple) in un'altra le cui singolarità siano tutte ordinarie. Si tratta di dimostrare che la cosa è possibile.

Segre osserva che la validità di questa proposizione era stata asserita da Noether, ma che in Noether non vi è nessun tentativo di giustificazione. Dopo Noether, vi fu un tentativo di dimostrazione da parte di Pasquale Del Pezzo, ma Segre fa vedere che la dimostrazione tentata da Del Pezzo non è conclusiva. Dopo le quali considerazioni di carattere critico, condotte particolarmente alla luce della nozione di composizione di una singolarità superficiale, non vi è in Segre una parte sistematica relativa alla dimostrazione in discorso.

Questa parte sistematica è stata eseguita, in quegli anni, da Beppo Levi, il quale in varie pubblicazioni [1], [2], [6], [7], [9], [11] che cominciano col 1897 e continuano per qualche tempo, è giunto al teorema in questione. È anche da aggiungere che nessuna obbiezione venne mossa contro la dimostrazione di Levi, sebbene il terreno dove essa si svolge sia da considerare minato; così che per esempio la dimostrazione di un risultato, che era in quello stesso ordine di idee, dovuto a Kobb, fu riconosciuta non valida, come contribuì a provare lo stesso Levi.

Per molto tempo Levi è stato considerato il debellatore della questione. Sulla sua dimostrazione non furono sollevate obbiezioni: essa è citata come definitiva da Picard, e anche da quelli che cercarono dimostrazioni svolgentisi in modi diversi, come Severi o Albanese.

Ma, anche in matematica, vi sono delle cose non definitive. E così, da un lato, alcune decine di anni dopo, vennero le critiche di Oscar Zariski (3) che mosse delle obbiezioni al procedimento impiegato da Levi in quanto egli non si dimostra pienamente convinto che l'impiego alternato di due certi tipi di trasformazioni per ridurre man mano le singolarità non possa in qualche momento ingenerare delle difficoltà.

D'altro lato, col passare del tempo, è mutata l'impostazione stessa della questione, in quanto ha preso il sopravvento la geometria algebrica rispetto a un corpo qualunque, anziché rispetto al corpo complesso ordinario, che solo era stato considerato durante il primo periodo.

E anzi credo che proprio recentemente sia stato annunciato un risultato di notevole generalità, stabilito dal giapponese Hironaka.

Relativamente all'attuazione di Beppo Levi in questo campo è da aggiungere qualche cosa. Anzitutto, molti anni dopo, nel 1927, in un breve scritto [57] contenuto nel secondo dei due volumi destinati dalla Società Fisico-Matematica di Kazàn a celebrare il centenario della scoperta di Lobatschevski, egli ritornò sulla questione, pubblicando quella che nella sua intenzione costituiva l'introduzione alla generalizzazione alle varietà a più dimensioni. È però da dire che sulla questione – a quanto so – egli non ritornò più, salvo l'eccezione che sto per ricordare. Per ritrovare uno scritto di Levi sulla questione, bisogna arrivare a uno degli ultimissimi suoi lavori, pubblicato nelle «Mathematicae Notae» nel 1957, lavoro [153] scritto in parte in spagnolo e per una piccola parte in italiano, che si legge con commozione, in quanto vuol essere un congedo e si chiude con parole di saluto a colleghi e amici lontani, e appunto in tale intenzione si serve in questa parte della lingua materna. Nelle parole conclusive, egli riconosce il carattere arduo e riposto di tutta la questione, e dei mezzi di cui si era servito per risolverla, e riconosce anche il carattere di oscurità che per lui stesso presentavano alcuni appunti esplicativi che intorno al 1900 aveva redatti per uso personale di Corrado Segre.

Una menzione a sè, nella produzione geometrica di quel primo periodo, vogliono poi i lavori sui fondamenti della geometria, iniziati con la poderosa Memoria sui *Fondamenti della metrica proiettiva* [15], ved. anche [27], [37].

(3) OSCAR ZARISKI, *Algebraic Surfaces* (*Ergebnisse der Mathematik*), Berlin, Springer, 1935, cfr. pp. 18–19. Allo stesso Zariski è poi dovuta una dimostrazione di altro tipo: cfr. *The reduction of the singularities of an algebraic surface*, «Annals of Mathematics», vol. 40, pp. 636–689 (1939). Ved. ivi anche altre citazioni bibliografiche.

Ma intanto, verso il principio del nuovo secolo, Levi si andava allontanando dalla geometria algebrica per prendere posizione nella teoria delle funzioni e in quella degli insiemi. Al 1902 risale una sua Nota, pubblicata nei « Rendiconti dell'Istituto Lombardo », *Intorno alla teoria degli aggregati* [10], che poi i trattatisti di Teoria degli insiemi hanno citato in relazione col cosidetto assioma di Zermelo. Fin dal 1890 Peano, nella sua Memoria sull'integrabilità delle equazioni differenziali pubblicata nei « Mathematische Annalen » (4), aveva esplicitamente enunciato l'impossibilità di applicare infinite volte una legge arbitraria per estrarre da un insieme un suo singolo elemento; cioè, per dirlo in breve, aveva dichiarata la inammissibilità delle infinite scelte arbitrarie. Come è notissimo, nel 1904 Zermelo (5) – allo scopo di dimostrare che l'insieme dei numeri reali, e anzi un insieme qualunque, è bene ordinabile – ha adottato un punto di vista completamente opposto a quello di Peano, conferendo validità alle infinite scelte mediante un assioma costruito *ad hoc*; assioma secondo il quale, dato un insieme arbitrario, esiste qualche legge di corrispondenza la quale ad ogni suo sottoinsieme associa un proprio elemento. Sul principio di Zermelo torneremo tra un momento; qua vogliamo solamente ricordare che, nella sua Nota del 1902, Beppo Levi – lontanissimo, allora e in seguito, dall'idea di poterlo ammettere, e quindi di applicarlo – vi ha accennato, *avant la lettre*, con parole che quelle poi impiegate dallo stesso Zermelo ricordano molto da vicino.

Sul principio di Zermelo, naturalmente, Levi ritornò in seguito più di una volta. Nei riguardi di quel principio egli metteva in rilievo i tre partiti in cui si dividono i matematici: anzitutto quelli che – seguendo Peano – rifiutano decisamente ogni ragionamento in cui si ricorra alle infinite scelte arbitrarie: Levi però ha espressa l'opinione che i seguaci di questa tendenza siano andati, nella rigorosa applicazione del divieto, anche più in là, giungendo a negare validità non solo alle infinite scelte, ma anche alle infinite operazioni, perfettamente definite, i cui risultati dipendano in catena gli uni dagli altri, e quindi non siano a priori prevedibili. I matematici della seconda fazione accettano il principio di Zermelo, e considerano senz'altro ammissibile un ragionamento in cui intervengano infinite scelte: non soltanto nel caso in cui gli infiniti elementi scelti arbitrariamente sono in corrispondenza con la successione dei numeri naturali, ma in un senso più vasto.

Esiste poi un partito intermedio, nel quale Beppo Levi collocava anche se stesso, che dal più al meno è disposto a adottare un atteggiamento pragmatistico, accettando o rifiutando le infinite scelte secondoché lo consigliano il buon senso, e l'intuizione della verità matematica. In modo più concreto (e in questi termini si è espresso Beppo Levi in una comunicazione all'ottavo Congresso di Filosofia tenuto a Roma nel 1933 [74]) un criterio per caratteriz-

(4) G. PEANO, *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles*, « Math. Ann. », Bd. XXXVII, pp. 182–218 (1890), cfr. p. 210. (Cfr. *Opere*, vol. I, p. 190).

(5) E. ZERMELO, *Beweis das jede Menge wohlgeordnet werden kann*, « Math. Ann. », Bd. LIX, pp. 514–516 (1904).

zare i ragionamenti in cui le infinite scelte sono ammissibili si può trovare accettando i ragionamenti la cui conclusione rimane immutata quando si modificano le condizioni di tempo, di luogo, e di soggetto pensante.

La posizione abbastanza conciliante assunta da Levi nelle parole che in qualche modo ho riprodotto – e si potrebbero anche cercare esemplificazioni in singoli lavori di Levi – non debbono tuttavia far dimenticare il fermissimo suo atteggiamento contro un'accettazione indiscriminata del principio di Zermelo.

Già quando scrisse le sue *Riflessioni sopra alcuni punti della teoria degli aggregati* e *delle funzioni*, pubblicate nel 1918 nel volume di *Scritti offerti ad Enrico D'Ovidio* [42], Beppo Levi parte dalla premessa che ogni ragionamento matematico presuppone, come dominio delle proprie considerazioni, un insieme (o un numero infinito di insiemi) entro il quale esso postula la possibilità di scegliere un elemento arbitrario, come atto di pensiero primo o irriducibile: quell'insieme è quello che in lavori successivi (per esempio nella Memoria ad esso intitolata [78] pubblicata nei « Fundamenta mathematicae » del 1934) Levi chiamerà il *dominio deduttivo*. Nel principio di Zermelo, invece, si va molto al di fuori dell'insieme nel quale si dovrebbe operare, il che toglie a quel principio ogni legittimità. Levi non esita ad affermare che l'ammissione del principio di Zermelo contraddice alla natura essenziale dell'Analisi matematica, e che perciò esso deve essere respinto come privo di ogni senso.

La nozione di dominio deduttivo è venuta assumendo in Levi un'importanza fondamentale, e vale la pena di soffermarvisi un momento, ricorrendo a qualcuna delle esposizioni che egli le ha successivamente dedicato, quali la Memoria dei « Fundamenta mathematicae », o l'esposizione in spagnuolo del 1942, uno dei primi frutti della sua permanenza a Rosario. Vale la pena, come dicevo, anche se non si abbia sempre l'impressione di poter capire a fondo tutto il pensiero di Beppo Levi; e lo si confessa tanto più agevolmente, in quanto si pensa che anche alcuni recensori di quei lavori – e si tratta spesso di nomi ben noti – manifestano apertamente una certa mancanza di sicurezza di aver compreso a fondo il pensiero di Levi.

Torniamo dunque sulle parole che ho detto quando ho parlato della nozione di dominio deduttivo, e dell'aggregato primo che sta alla sua base. Questo aggregato primo è una idea primitiva, e nulla più. Così, l'aritmetica poggia sul dominio deduttivo dei numeri naturali. In esso ha un senso scegliere uno o più elementi, soltanto col designarli con un nome. Secondo Levi, anche i numeri reali costituiscono una idea primitiva, che si forma nel nostro spirito in un certo momento del suo sviluppo. La nozione di un singolo numero reale si può spiegare come esempio mediante il solo aggregato primitivo dei numeri naturali, ma questa spiegazione di un esempio non deve essere confusa con quella che è l'idea generale di un numero reale, e della classe da questi costituita. Se si assumono come aggregati primitivi quelli dei numeri naturali e dei numeri reali, si può costruire l'Analisi, nella sua parte classica. Se poi si assumono tre aggregati primitivi, e cioè oltre ai due precedenti – anche quello delle funzioni, allora si può sviluppare anche la parte moderna dell'Analisi.

Quando un dominio deduttivo differisce da un altro solamente perché agli aggregati primitivi del secondo se ne aggiunge un altro, Levi chiama il primo un *ampliamento del secondo*, e sotto certe condizioni parla di un *ampliamento naturale*. Anzi Levi ha enunciato un certo principio, da lui chiamato *principio di approssimazione*, che presiede a tali ampliamenti naturali.

Levi si è trovato a iniziare la propria attività nel campo dell'Analisi proprio negli anni in cui la nozione di integrale era stata, si può dire rivoluzionata dalla nuova nozione di integrale di Lebesgue. Beppo Levi fu tra i primi a entrare nel nuovo ordine di idee. Intanto, in una serie di Note lincee del 1906 [20] [21], portò il suo contributo a dimostrare alcuni punti fondamentali della nuova teoria, anche se Lebesgue non dimostrò di gradire completamente il suo intervento. E poi Levi era troppo fine per non apprezzare immediatamente l'utilità che in determinate circostanze può offrire l'integrale di Lebesgue: non esitò a servirsi di esso – almeno in un primo tempo – nelle sue memorabili ricerche, di cui si dirà tra poco, sul problema di Dirichlet. Di notevole portata è poi la questione, che preoccupò Beppo Levi durante molti anni, di liberare la nozione dell'integrale di Lebesgue dall'intervento del concetto di misura di un insieme; preoccupazione che ben si comprende, non foss'altro che dal punto di vista didattico. A dare risposta alla questione, Beppo Levi è intervenuto in modo essenziale con tre grossi lavori: due di essi in italiano, e portanti lo stesso titolo: *Sulla definizione dell'integrale*, pubblicati il primo [49] negli «Annali di matematica» del 1923, e il secondo [86] nel 1936 nel volume di *Scritti matematici dedicati a Luigi Berzolari*. Il terzo lavoro [103] è un'esposizione in lingua spagnuola che risale al periodo argentino.

Nella Memoria del 1923 Levi aveva dato una nuova definizione diretta dell'integrale, il quale veniva poi di fatto a coincidere con l'integrale di Lebesgue nel caso di funzioni limitate misurabili: Levi aveva però espresso il dubbio circa la possibilità di immaginare l'estensione della sua definizione anche al caso di funzioni non misurabili. Effettivamente, poco dopo quella prima Memoria di Beppo Levi, era intervenuto Vitali, dimostrando che la condizione della misurabilità è superflua. Ma Levi non si riteneva completamente soddisfatto, in quanto Vitali utilizzava ancora idee che stavano nell'ambito della teoria di Lebesgue, e in particolare faceva uso del concetto di misura. Sorse così la seconda Memoria di Levi, intesa a giungere alle principali proprietà dell'integrale per via diretta, in modo che piuttosto si possa giungere alla teoria della misura come a un'applicazione della teoria dell'integrale. È così che nella nuova Memoria Levi ottiene sia il teorema sull'integrale della funzione limite di una successione crescente di funzioni, sia il cosidetto teorema di Fubini.

Una menzione a parte vogliono poi gli studi di Beppo Levi sul problema di Dirichlet, cioè sul cosidetto primo problema al contorno. È appena il caso di ricordare che esso riguarda la ricerca di una funzione $f(x, y)$ armonica nei punti di una regione, che sul contorno di questa assuma valori assegnati. L'unicità della soluzione si prova senza difficoltà. Le cose stanno diversamente per la prova dell'esistenza di una soluzione. È notissimo che Riemann aveva pensato di poter affermare questa esistenza, in base al cosidetto principio di Dirichlet, secondo il quale la soluzione è necessariamente quella funzione che – tra tutte le funzioni $u(x, y)$ assumenti al contorno i valori assegnati – rende minimo il cosidetto integrale di Dirichlet, cioè l'integrale $D(u)$, esteso al dominio, della somma dei quadrati delle derivate parziali prime della funzione u, rispetto a ciascuna delle due variabili indipendenti x, y. Ma, come pure è notissimo, Weierstrass aveva tolta ogni illusione sulla validità della presunta dimostrazione esistenziale fondata sul principio di Dirichlet, in quanto – mentre è evidente l'esistenza di un limite inferiore d per i valori assunti dall'integrale considerato, – non è lecito affermare senz'altro che il limite inferiore sia un minimo, cioè concludere l'esistenza di una funzione f in corrispondenza alla quale quell'integrale assuma effettivamente il valore d. Intorno al 1900 Hilbert aveva richiamato l'attenzione dei matematici sul principio di Dirichlet, in vista della possibilità di trasformarlo in un metodo variazionale atto alla dimostrazione esistenziale; e anzi Hilbert aveva raggiunto lo scopo in casi particolari. A base della dimostrazione sta la considerazione di una *successione minimizzante* $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ tale che

$$\lim_{n=\infty} D(u_n) = d.$$

Se fosse lecita l'inversione del segno di limite con quello di integrale, ne verrebbe

$$D(\lim_{n=\infty} u_n) = d,$$

cioè si concluderebbe appunto che

$$f = \lim_{n=\infty} u_n$$

è una soluzione. Beppo Levi ha affrontato e risolto il problema di Dirichlet in una celebre Memoria pubblicata nel 1906 nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo » [23], seguendo l'idea di dedurre da una prima successione minimizzante una seconda la quale offre certi caratteri di convergenza uniforme, che gli permette di raggiungere lo scopo. A tal fine egli applica ripetutamente un opportuno procedimento di media. E poco più tardi, in seguito ad una semplificazione comunicatagli da Guido Fubini, Levi [24] semplificò ulteriormente il suo procedimento, evitando anche l'uso dell'integrale di Lebesgue, che aveva utilizzato nella trattazione primitiva, e riconducendo così il risultato raggiunto nell'ambito delle trattazioni più usuali.

Approssimativamente allo stesso periodo appartengono anche due notevoli contributi di Beppo Levi alla teoria dei numeri. Uno è costituito da un gruppo di quattro Note, pubblicate tra il 1906 e il 1908 negli « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino » [19], [31] e riassunte in una comunicazione al Congresso internazionale dei matematici tenuto a Roma nel 1908 [34].

Esse riguardano l'equazione indeterminata di terzo grado (diciamo di genere uno, con riferimento a un'ovvia interpretazione geometrica) perseguendo, indipendentemente, uno scopo propostosi anche da Hurwitz. Da parecchi Autori, incominciando con Fermat, erano stati indicati modi, geometricamente spontanei, per dedurre una soluzione razionale da una, o da due soluzioni conosciute, diciamo brevemente per dedurre un punto razionale della cubica proposta, da uno o due punti razionali noti. Levi ha fatto una trattazione sistematica dell'argomento, fondandosi sul concetto da lui introtrodotto di una configurazione finita di punti razionali, ottenuta quando si applicano i procedimenti accennati sia ad alcuni punti razionali di partenza, sia a quelli da essi successivamente dedotti mediante gli stessi procedimenti. L'altro contributo di Levi alla Teoria dei numeri è rappresentato da una Memoria del « Circolo matematico di Palermo » [39] che completa in un punto essenziale un lavoro di Minkowski relativo a un sistema di n forme lineari in altrettanti variabili: Levi ha anche dimostrato un risultato che Minkowski aveva indicato come presumibile, senza possederne la dimostrazione.

Pur dovendo ora rinunciare a soffermarmi più a lungo su aspetti particolari dell'attività matematica di Beppo Levi, vorrei solo menzionare due sue esposizioni, una brevissima, l'altra breve sulla Logica matematica. La prima è la voce omonima dell'Enciclopedia Italiana [75]. La seconda è il testo di una breve serie di conferenze tenute da Levi nell'Università argentina di Tucumán. Il titolo di quest'ultima pubblicazione si tradurrebbe in italiano « Scorreria nella logica ». Un poco meno comune è forse il termine spagnuolo « correría » corrispondente all'italiano « scorreria », tanto che Levi si è sentito in obbligo di cominciare con alcune parole esplicative in quel termine, traendole dal Dizionario dell'Accademia, il quale registra due significati: il primo di « ostilità che la gente di guerra pratica taglieggiando e saccheggiando il paese » e il secondo di « viaggio generalmente breve, compiuto da vari punti, con ritorno al punto di partenza ». E Levi chiariva che per le sue conferenze la seconda accezione si poteva accettare integralmente, e la prima come un'iperbole alquanto esagerata.

Se mi è lecito inserire un ricordo personale, vorrei aggiungere che quelle conferenze di Levi mi rammentano alcune piacevoli giornate dell'autunno 1942 vissute a Tucumán come in un tuffo – in quel momento e in quel luogo – nel mondo intellettuale italiano. Erano venuti a Tucumán Beppo Levi per tenere quelle conferenze, e contemporaneamente l'amico Leone Lattes, professore di medicina legale all'Università di Pavia, residente allora a Buenos Aires, che avevo invitato per conto della Società scientifica argentina a parlare dei gruppi sanguigni. Erano anche a Tucumán, come professori, mio fratello Benvenuto, e l'altro amico Renato Treves, oggi professore all'Università di Milano. Era veramente una piccola Italia quella che avevamo costituita in quei giorni.

Non vorrei poi passare del tutto sotto silenzio quattro volumi dovuti a Beppo Levi, che risalgono a momenti diversi della sua vita.

Dei due scritti in spagnolo, uno [117] è un'esposizione di teoremi fondamentali di esistenza per sistemi di equazioni a derivate parziali dove si assegna un procedimento sistematico, che guida o ad accertarne l'incompatibilità, oppure a calcolare le soluzioni. Questo libro è una rielaborazione di un corso di Analisi superiore da lui tenuto a Bologna, e anche di un corso di conferenze svolto a Rosario nel 1941: esso porta un'affettuosa dedica al fratello Eugenio Elia « che fu il suo più caro amico e compagno di studi d'ogni genere ». L'altro, *Leyendo a Euclides* [138], è un libro, di lettura piacevole, scritto con l'intenzione di presentare senza pretese a un pubblico non matematico i pensieri di un matematico occasionati dalla lettura di Euclide. In Beppo Levi gli Elementi di Euclide appaiono piuttosto frutto delle concezioni del circolo dei matematici e filosofi che attorniavano Socrate che non l'opera di un alessandrino del 300 av. Cr. La confusione, un tempo esistente tra Euclide ed Euclide da Megara, non temuta da Beppo Levi, ha suscitato più di una critica al suo libro, che resta cionondimeno altamente interessante. I due volumi in italiano [41], [90], usciti a vent'anni di distanza uno dall'altro, costituiscono nel loro insieme un breve corso di Analisi. Particolarmente notevole è il primo, che risale ai tempi di Parma, e svolge la parte algebrica con molta semplicità e originalità, operando in un campo qualunque, e anticipandosi così ai trattati – che sono venuti assai più tardi – di Algebra moderna, o Algebra astratta.

Accanto a questi quattro, si potrebbe forse mettere un quinto libriccino, dedicato ai bambini, l'*Abbaco da 1 a 20* [45] oggi purtroppo quasi introvabile, nel quale – in base al riconoscimento che i numeri costituiscono il mezzo dell'operazione di contare, e non già il suo risultato – si insegna, in una prima iniziazione aritmetica, a concepire i numeri come gli elementi di una successione ordinata formata dalle parole che li designano.

Mi sono già intrattenuto sulla grande attività di Beppo Levi durante il periodo argentino: in alcuni momenti di questo periodo, pure la sua produzione fu assai considerevole, anche se molto spesso egli le abbia conferiti caratteri propri.

Talvolta egli ha ripreso, per diffonderlo tra un pubblico nuovo, talune sue esposizioni dei periodi precedenti. Talora si è avvalso di collaboratori. Talora ha anche affrontati problemi nuovi, non senza lasciare qua e là l'impressione che la sua voce non fosse più quella, come è avvenuto per esempio del lavoro, in collaborazione con Santalò e Celestino De Maria [140], sulla determinazione dell'ordine del cono che, in geometria proiettiva differenziale, generalizza il notissimo cono di Del Pezzo (6).

Beppo Levi aveva uno spirito eminentemente critico, anche nei riguardi di se stesso e di quanto veniva scrivendo, cosicché avveniva anche che, nel

(6) Cfr. CARMELO LONGO, *Studio numerativo sopra le varietà di contatto delle superficie in uno spazio ad n dimensioni*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa » (3), *4* (1950), 223–230.

momento in cui egli esponeva un certo punto di vista, gli si affacciassero riserve e limitazioni tali da indurlo a sovrapporgli punti di vista magari completamente opposti che tosto affioravano nel suo dire. A ciò si deve imputare la circostanza già accennata che il lettore – o l'ascoltatore – talvolta si trovava in difficoltà circa la convinzione di avere afferrato a fondo il suo pensiero, sebbene questo si fosse presentato a lui nel modo più limpido.

In qualunque periodo si esamini l'attività produttrice di Beppo Levi, una caratteristica comune ai vari periodi è la sua grandissima versatilità. Egli era capace di prendere un interesse profondo a problemi di carattere svariatissimo. In questo senso egli appartiene ancora alla generazione dei grandi matematici del passato, i quali ebbero la virtù di dominare moltissimi campi della matematica, senza rinchiudersi in quella unilateralità di interesse, che si può spiegare, ma che comunque non cessa di essere una caratteristica della matematica dei tempi moderni.

Contro la matematica dei tempi moderni, e non per questa sola ragione, Beppo Levi si mostrava alquanto severo. In un periodo di tempo che va approssimandosi al secolo – egli ha scritto – la forma del pensiero matematico è andata variando sensibilmente in direzione meno adatta al mio proprio pensiero.

Quanto alla severità, erreremmo completamente ritenendola in genere un tratto del suo carattere, che era invece indulgente e affettuoso. In modo particolare, egli provava i sentimenti più affettuosi verso i suoi familiari, anche se da qualcuno di loro i casi della vita lo avevano condotto a vivere lontano: a essi si sentiva profondamente legato, e ad essi – vicini e lontani – volgeva costantemente il suo pensiero.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI.

[1] *Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche*, « Torino Atti », *33*, pp. 66–86 (1897).

[2] *Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche*, « Ann. di Mat. » (2), *26*, pp. 218–253 (1897).

[3] *Caratteri di divisibilità*, « Period. di matem. », *13*, pp. 191–192 (1898).

[4] *Sulla trasformazione di una curva algebrica in un'altra priva di punti multipli*, « Lincei Rend. » (5), *7*, pp. 111–113 (1898).

[5] *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica*, « Torino Mem. » (2), *48*, pp. 83–142 (1898).

[6] *Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari delle superfici algebriche*, « Ann. di Mat. » (3), *2*, pp. 127–138 (1899).

[7] *Dell'intersezione di due varietà contenute in una varietà semplicemente infinita di spazi*, « Torino Atti », *34*, pp. 745–760 (1899).

[8] *Sulla teoria delle funzioni e degli insiemi*, « Lincei Rend. » (5), *9*, pp. 72–79 (1900).

[9] *Sulla trasformazione dell'intorno di un punto per una corrispondenza birazionale tra due spazi*, « Torino Atti », *35*, pp. 20–33 (1900).

[10] *Intorno alla teoria degli aggregati*, « Rend. Ist. Lomb. » (2), *35*, pp. 863–868 (1903).
[11] *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables*, « Compt. Rend. », *134*, pp. 642–644 (1902).
[12] *Sur la résolution des points singuliers des surfaces algébriques*, « Compt. Rend. », *134*, pp. 222–225 (1902).
[13] *Teoria geometrica delle proporzioni fra segmenti, indipendente dal postulato di Archimede*, « Suppl. al Period. », *6*, pp. 114–117 (1903).
[14] *Sull'uguaglianza diretta ed inversa delle figure*, « Per. di mat. » (3), *1*, pp. 207–214 (1904).
[15] *Fondamenti della metrica proiettiva*, « Torino Mem. » (2), *54*, pp. 281–353 (1904).
[16] *Sulle superficie del 4° ordine con 13 punti doppi*, Torino, Bona, (1904), di pp. 22.
[17] *Sur la géométrie et la trigonométrie sphériques*, « Ens. math. », *7*, pp. 193–206 (1905).
[18] *Punti doppi uniplanari delle superficie algebriche*, « Torino Atti », *40*, pp. 139–167 (1905).
[19] *Saggio per una teoria aritmetica delle forme ternarie*, « Torino Atti », *41*, pp. 739–764 (1906).
[20] *Ricerche sulle funzioni derivate*, « Lincei Rend. » (5), *15*, pp. 433–438, 551–558, 674–684 (1906).
[21] *Ancora alcune osservazioni sulle funzioni derivate*, « Lincei Rend. » (5), *15*, pp. 358–368 (1906).
[22] *Sopra le funzioni che hanno derivata in ogni punto*, « Lincei Rend. » (5), *15*, pp. 410–415 (1906).
[23] *Sul principio di Dirichlet*, « Palermo Rend. », *22*, pp. 293–360 (1906).
[24] *Sul principio di Dirichlet* (*da una lettera al prof. Fubini*), « Palermo Rend. », *22*, pp. 387–394 (1906).
[25] *Sopra l'integrazione delle serie*, « Rend. Ist. Lomb. » (2), *39*, pp. 785–780 (1906).
[26] *Dalla pittura alla cartografia*. Prolusione. Cagliari, Dessi, (1907), di pp. 28.
[27] *Geometrie proiettive di congruenze e geometrie proiettive finite*, « Amer. Math. Soc. Transactions », *8*, pp. 354–365 (1907).
[28] *Il teorema di Desargues, il teorema di Pappo e l'esistenza di una reciprocità o di una polarità*, « Ann. di mat. » (3), *15*, pp. 171–186 (1908).
[29] *Osservazioni e congetture sopra la geometria degli antichi Indiani*, « Bibl. math. » (3), *9*, pp. 97–105 (1906).
[30] *Esperienza e intuizione in rapporto alla propedeutica matematica*, « Boll. di matem. (del Conti) », a. VI, pp. 177–186 (1907).
[31] *Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie*, « Torino Atti », *43*, pp. 99–120, 413–434, 672–681 (1908).
[32] *Antinomie logiche?*, « Ann. di matem. » (3), *15*, pp. 187–216 (1908).
[33] *Alcune considerazioni sulle idee scientifiche primordiali*. Discorso per l'inaugurazione dell'anno accademico 1907–1908 nella R. Università di Cagliari. Cagliari, Valdes, 1908, di pp. 53.
[34] *Sull'equazione indeterminata del 3° ordine*. Roma, 4° Congresso internaz., *2*, pp. 175–177 (1909).
[35] *Il significato educativo dell'insegnamento della matematica*, in *Nuovi doveri* (1908).
[36] *La laurea universitaria come preparazione degli insegnanti*, in *Nuovi doveri* (1908).
[37] *Sui postulati della metrica generale proiettiva*, « Jahr. D. M. Ver. », *19*, pp. 300–306 (1910).
[38] (in collaborazione con ALESSANDRO LATTES) *Cenni storici sulla Regia Università di Cagliari*, compilati dal prof. Alessandro Lattes per il periodo che va dalla fondazione dello Studio al 1848 (anno della unificazione legislativa della Sardegna) e dal prof. Beppo Levi per il periodo che va dal 1848 ai giorni nostri, Cagliari Vales, 1910, di pp. 88.
[39] *Un teorema del Minkowski sui sistemi di forme lineari a variabili intere*, « Palermo Rend. », *31*, pp. 318–340 (1911).
[40] *Mario Pieri*, « Loria Boll. Bibl. », *15*, pp. 65–74 (1913).
[41] *Introduzione all'Analisi matematica*. I: *Teorie generali*. Paris, Hermann, Parma, presso l'A., pp. xxii + 482 (1916).

[42] *Riflessioni sopra alcuni principii della teoria degli aggregati e delle funzioni*. Scritti matem. offerti ad Enrico D'Ovidio, Torino, Bocca (1918), pp. 305–324.
[43] *Nazioni e umanità*, Parma 1919.
[44] *La dimensionalità dello spazio*, « Eserc. matem. », *1*, pp. 203–208 (1921).
[45] *Abbaco da 1 a 20*. Illustr. di L. B. Parma, B. Levi (1922), di pp. 60.
[46] *A proposito di Logica matematica*, in *Nuovi doveri* (1922).
[47] *Il primo avviamento all'aritmetica*, « L'Arduo », anno II (1922).
[48] *Sui numeri di Liouville e su un corpo non numerabile di numeri reali*, « Lincei Rend. » (5), *32*, pp. 600–603 (1923).
[49] *Sulla definizione dell'integrale*, « Ann. di Mat. » (4), *1*, pp. 57–82 (1923).
[50] *Sui procedimenti transfiniti* (Auszug aus einem Briefe an Herrn Hilbert, « Math. Ann. », *90*, pp. 164–173 (1923).
[51] *Ancora sulla logica matematica*, in *Nuovi Doveri* (1923).
[52] *Calcolo differenziale assoluto*, « Ann. Scient. ed Ind. », *61*, Bologna, Stab. Poligr. Riuniti, 32 pp. (1924).
[53] *Perché lo spazio fisico ha tre dimensioni?*, « L'Arduo », anno III (1923).
[54] *Sull'urto delle sfere elastiche*, « Rend. R. Acc. Sc. dell'Ist. di Bologna », XXXIV, pp. 97–99 (1926).
[55] *Sulle unità di misura e le equazioni di dimensione*, « L'Elettricista », *35* (1926).
[56] *Sulla relazione* $\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = \pi i/2$ *nella teoria delle funzioni ellittiche*, « Boll. UMI », *6*, pp. 137–141 (1927).
[57] *Sur la résolution des points singuliers d'une variété algébrique à un nombre quelconque de dimensions. In memoriam N. I. Lobatschevski*, vol. II, pp. 191–196 (1927).
[58] *Varie di matematica e fisica teorica 1926*, « Ann. Sc. e Ind. », *A 63*, Bologna, Stab. Polig. Riuniti, 31 pp. (1928).
[59] *A proposito delle questioni nn. 142 e 143*, « Period. di Mat. » (4), pp. 332–335 (1927).
[60] *Nuove teorie della meccanica quantistica*, 1928.
[61] *Stabilità ed instabilità delle associazioni biologiche*, « Boll. UMI », *10*, pp. 209–215 (1931).
[62] *Intorno ad una interessante osservazione dell'Ing. Riccardo Cantoni*, « Period. di Matem. » (4), pp. 301–302 (1931).
[63] *Luigi Cremona*, « Annuario Univ. di Bologna », di pp. 10 (1931).
[64] *Fondamenti della logica e fondamenti della meccanica quantistica*, « Ann. Sc. e Ind. », anno LXIV (1927), Bologna 1931.
[65] *Un problema di geometria*, « Boll. UMI », di 4 pp. (1931).
[66] *Sulla lettura degli strumenti a oscillazione*, « L'Elettricista », 1931.
[67] *L'Opera matematica di Giuseppe Peano*, « Boll. UMI », *11*, pp. 253–262 (1932).
[68] *Determinazione della natura delle radici della soluzione polinomia dell'equazione differenziale* $(a_1 x + a_0) y'' + (b_1 x + b_0) y' - nb_1 y = 0$, « Ann. Pisa » (2), *1*, pp. 255–261 (1932).
[69] *Postilla*, « Boll. UMI », *11*, pp. 37–38 (1932).
[70] *Dimostrazione di una formula fondamentale nella teoria delle dimensioni fisiche*, « Rend. Bologna » (2), *36*, pp. 72–75 (1932).
[71] *Nota di logica matematica*, « Rend. Ist. Lombardo » (2), *66*, pp. 239–252 (1933).
[72] *Intorno alle vedute di G. Peano circa la logica matematica*, « Boll. UMI », *12*, pp. 65–68 (1933).
[73] *Sulla natura analitica di una classe di funzioni definite da serie di potenze convergenti sulla circonferenza di convergenza*, « Boll. UMI », *12*, pp. 1–5 (1933).
[74] *Considerazioni sulle esigenze logiche della nozione del reale e sul principio delle infinite scelte*, Atti VIII Congr. di Filosof., Roma 1933; Roma 1934, pp. 55–56.
[75] Voce « *Logica matematica* », « Enc. Italiana », t. XXI, pp. 398 (1934).
[76] (in collab. con T. VIOLA) *Intorno ad un ragionamento fondamentale nella teoria delle famiglie normali di funzioni*, « Boll. UMI », *12*, pp. 197–203 (1933).
[77] *Sulle equazioni della meccanica ondulatoria*, « Mem. Acc. Sc. Ist. di Bologna » (9), *1*, pp. 95–100 (1934).
[78] *La nozione di « dominio deduttivo » e la sua importanza in taluni argomenti relativi ai fondamenti dell'analisi*, « Fundamenta », *23*, pp. 63–74 (1934).

[79] *Sur les ensembles de points qui ne peuvent être ensembles de zéros d'une fonction analytique de plusieures variables*, « Comptes rendus », *198*, pp. 1735–1736 (1934).

[80] *Sul teorema d'identità per le funzioni analitiche di più variabili*, « Boll. UMI », *13*, pp. 1–5 (1934).

[81] *Intorno ai reticoli spaziali*, « Periodico di Mat. » (4), *14*, pp. 235–239 (1934).

[82] *Probabilità dello spezzamento di un segmento in parti che possono essere lati di un n–agono* (in collab. con F. Kartessi), « Period. di matem. », (4), XVII, pp. 238–242 (1937).

[83] *A proposito dell'infinito e delle sue antinomie*, « Atti Soc. I.P.S. », *24*, pp. 361–367.

[84] *Una forma particolarmente elegante della soluzione generale di un sistema di equazioni lineari*, « Rend. Acc. Sc. Ist. di Bologna » (2), pp. 73–76 (1937).

[85] Voce « *Peano G.* », « Enc. italiana », t. XXVI, pp. 366 (1935).

[86] *Sulla definizione dell'integrale*. Scritti mat. offerti a L. Berzolari. Pavia 1936, pp. 173–181.

[87] *Osservazioni riguardo alla precedente nota di C. Biggieri*, « Boll. UMI », *15*, pp. 214–215 (1906).

[88] *Considerazioni sopra l'economia delle condizioni iniziali nella risoluzione dei sistemi di equazioni alle derivate parziali*, « Mem. Acc. Sc. Ist. di Bologna » (9), *2*, pp. 141–144 (1935).

[89] *Integrazione di una equazione differenziale interessante l'elettrotecnica*, « Rend. Acc. Sc. Ist. di Bologna », cl. a. F. (2), *38*, pp. 74–87 (1936).

[90] *Analisi matematica algebrica ed infinitesimale*, Bologna, Zanichelli, 1931, pp. VII + 541.

[91] *Una proprietà del sistema delle derivate parziali n·me di una funzione di più variabili*, « Rend. Lincei » (6), *26*, pp. 198–202 (1916).

[92] *Sopra un operatore funzionale*, « Atti Acc. Sc. Ist. di Bologna » (1937).

[93] *Qualche considerazione di matematica finanziaria*, « Boll. UMI », *17*, pp. 36–38 (1938).

[94] *Sull'intuizione geometrica negli elementi di calcolo*, « Rend. Acc. Sc. Ist. Bologna », Cl. S. F. (2), *42*, pp. 49–58 (1938).

[95] *Sobre el sistema* $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,dz = p(y)\ ,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,dy = q(x)$, « Publ. Inst. Mat. Rosario », *1*, n. 1 (1939).

[96] *Una teoría intuicionística de las funciones racionales enteras de una variable*, ibid., *1*, n. 4 (1940).

[97] *Sobre el teorema de Weierstrass, el teorema de Rolle, y el anterior teorema de Fubini*, ibid., *2*, pp. 29–34 (1940).

[98] *La personalidad de Vito Volterra*, ibid., *3*, pp. 25–36 (1941).

[99] *La noción de « dominio deductivo » como elemento de orientación en las cuestiones de fundamentos de las teorías matemáticas*, ibid., *2*, pp. 179–208 (1940).

[100] *Evolución del pensamiento matemático*, « Inst. Mat. Rosario », II, pp. 75–75 (1940).

[101] *Los polígonos planos y el teorema di Jordan*, « Math. Notae », *1*, pp. 9–26 (1941).

[102] *La aproximación come instrumento de cálculo y de demonstración*, « Math. Notae », *1*, pp. 37–63 (1941).

[103] *Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida*, « Publ. Inst. de Mat. Univ. Nac Litoral », *3*, pp. 65–116 (1941).

[104] *El número entero y el intelectualismo*, Conf. cultural de Rosario. Ciclo de carácter general. Publ. n. 1, Rosario 1941.

[105] *Sobre el desenvolvimiento de algunos conceptos de la Física*, « Math. Notae », *1*, pp. 109–128 (1941).

[106] *Definición y condiciones de existencia de la tangente y del círculo osculador en un punto de una curva*, « Math. Notae », *2*, pp. 11–34 (1942).

[107] *El postulado de Arquímedes, De Euclides a Galileo: conceptos modernos*, « Math. Notae », *2*, pp. 109–141 (1942).

[108] *Tullio Levi Civita (1873–1941)*, « Math. Notae », *2*, pp. 155–159 (1942).

[109] *Sobre la inversión de una integral definida*, « Publ. Inst. Mat. Un. Nac. de Lit. », *3*, pp. 119–120 (1941).

[110] *Sobre una transformación integral*, ibid., *3*, pp. 121–129 (1941).
[111] *Correría en la lógica*, «Rev. Univ. Nac. de Tucumán», *3*, pp. 13–78 (1942).
[112] *Apostilla*, «Math. Notae», *2*, pp. 184–187 (1942).
[113] *Sobre la resolución aproximada de ecuaciones transcendentes representadas por desarrollos de Taylor*, «Math. Notae», *3*, pp. 1–40 (1943).
[114] *Il sistema completo degli invarianti di una forma differenziale lineare per trasformazioni lineari della funzione*, «Mem. A. S. Ist. di Bologna», *3*, pp. 241–246 (1936).
[115] *Teoría matemática del aparato de Mariotte*, «Math. Notae», *3*, pp. 185–215 (1943).
[116] *Valoraciones aproximadas de n! para grandes valores de n*, «Math. Notae», *3*, pp. 148–154 (1943).
[117] *Sistemas de ecuaciones analíticas en términos finitos, diferenciables y en derivadas parciales*, «Monograf. publ. por la Fac. ciencias», n. 1. Rosario 1944, pp. 216.
[118] (in collab. con PEDRO CAPELLI e MISCHA COTLAR) *Los orígines de la teoría algorítmica de Wronski dentro de la doctrina pitagórica*, «Math. Notae», *3*, pp. 74–100 (1943).
[119] (in collab. con R. LAGUARDIA) *Sobre la representación por integrales de algunas funciones definidas por desarrollos de Taylor y aplicación a las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales*, « Publ. Inst. Mat. Rosario », vol. IV, pp. 205–232 (1943).
[120] *Algunas noticias elementares de la teoría de los números*, «Math. Notae», *4*, pp. 65–79 (1944).
[121] *Los polinomios de aproximación de sen x y cos x*, «Math. Notae», *4*, pp. 156–163 (1944).
[122] *Un problema de cálculo numérico: Sobre la inversión de funciones definidas por integrales. Aplicación a una integral de la teoría de las radiaciones*, «Math. Notae», *4*, pp. 185–212 (1944).
[123] *El principio de corrispondencia de Chasles–Cremona y el orden de la reglada de las trisecantes de una curva*, «Math. Notae», *4*, pp. 129–136 (1944).
[124] *Consideraciones sobre una proposición de W. H. Young*, «Math. Notae», *4*, pp. 145–155 (1944).
[125] *Sobre la cuestión N° 9*, «Math. Notae», *4*, pp. 41–47 (1944).
[126] *Sobre un problema diofántico*, «Math. Notae», *5*, pp. 108–119 (1945).
[127] (in collab. con MISCHA COTLAR) *Ejercitaciones sobre la función coseno*, «Math. Notae», *5*, pp. 193–214 (1945).
[128] *Sobre una fórmula de Laplace*, « Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral», *6*, pp. 341–351 (1946).
[129] *Cien años en la historia de la matemática*. Ciclo de Conferencias cientificas y de carácter general de la Soc. cient. argentina, t. II, pp. 57–68 (1945).
[130] *Magnitudes y dimensiones físicas*, «Math. Notae», *6*, pp. 1–39 (1946).
[131] *Federigo Enriques*, «Math. Notae», *6*, pp. 119–123 (1946).
[132] *Propriedades del cuadrángulo base de un haz de cónicas*, «Math. Notae», *6*, pp. 112–115 (1946).
[132] *Una ejercitación sobre integrales elípticas*, «Math. Notae», *6*, pp. 167–190 (1946).
[134] (in collab. con BERNHARD GROSS) *Sobre el cálculo de la transformación inversa de Laplace*, «Math. Notae», *6*, pp. 213–224 (1946).
[135] *Sobre el cálculo aproximado de integrales. A propósito de la Nota del Sr. R. Frucht*, «Math. Notae», *7*, pp. 218–229 (1947).
[136] *Ensayo histórico y crítico sobre la aritmética de los conjuntos y el problema del continuo*, «Math. Notae», *8*, pp. 6–79 (1948).
[137] *Sopra l'aritmetica trasfinita*, « Boll. UMI », (3) *4*, pp. 1–6 (1949).
[138] *Leyendo a Euclides*, Editoria Rosario, 1947, pp. 225.
[139] (in collab. con JOSÉ MASSERA) *Estudio en grande de una ecuación diferencial de segundo orden*, «Math. Notae», *7*, pp. 91–155 (1947).
[140] (in collab. con L. SANTALÒ e C. DE MARIA) *Estúdios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones*, « Publ. del Inst. Mat. Univ. Nac. del Litoral», *8*, pp. 3–72 (1946).
[141] *Consideraciones sobre el jacobiano*, «Math. Notae», *8*, pp. 97–102 (1948).

[142] *Sobre una propriedad limite de la esfera en n dimensiones*, «Math. Notae», *10*, pp. 36–40 (1950).
[143] *A propósito de la Nota del Dr. P. Calleja. Sobre paradojas lógicas y principio del tertium non datur*, «Math. Notae», *9*, pp. 155–159 (1949).
[144] *Sobre la forma de curvas de frecuencia compuesta*, «Math. Notae», *11*, pp. 87–109 (1951).
[145] *Sobre la solución de ecuaciones diferenciales lineares no homogéneas*, «Math. Notae», *12–13*, pp. 1–19 (1952).
[146] (in collab. con A. PETRACCA) *Estudio de una función polídroma*, «Math. Notae», *11*, pp. 124–138 (1951).
[147] (in collab. con A. PETRACCA) Complemento a la Nota: *Estudio de una función polídroma*, «Math. Notae», *12–13*, pp. 48–49 (1952).
[148] *Ensayo sobre el cálculo de la deflexión de las placas delgadas*, «Math. Notae», *12–13*, pp. 79–193 e 14 (1952); pp. 1–31 (1954).
[149] *Sobre la solución general de la ecuación en derivadas parciales de dos variables de orden n homogéneos con coeficientes constantes*, «Math. Notae», *14*, pp. 50–63 (1954).
[150] *Una breve conversación acerca de una palabra*, «Matemàtica» Revista Trapalanda, Rosario 1954.
[151] *L'opera matematica di Giuseppe Peano*. In memoria di G. Peano. Liceo Scient. Statale. Cuneo 1955, pp. 9–21.
[152] *Intorno al calcolo della deflessione delle piastre sottili*, « Rend. Semin. Univ. e Polit. Torino», *14*, pp. 67–74 (1954–55).
[153] *Puntos y variedades singulares sobre variedades algebraicas y analíticas*, «Math. Notae» a. XVI, *1–62*, pp. 73–129 (1957).
[154] *Mirando a la evolución histórica de la cnoseología científica*, «Math. Notae», a. XVI, pp. 92–100 (1957).
[155] *Algunas reflexiones sobre matematica y filosofía*, «Math. Notae», *14*, pp. 133–140 (1957).