Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Sul moto di una particella rispetto ad un riferimento fluido: analogie tra meccanica classica e relatività generale. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.5, p. 517–526.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_5_517_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Meccanica. — *Sul moto di una particella rispetto ad un riferimento fluido: analogie tra meccanica classica e relatività generale* (*). Nota II di GIORGIO FERRARESE, presentata (**) dal Socio G. KRALL.

3. - PREMESSE.

In meccanica classica il movimento è di regola riferito ad una terna cartesiana, o meglio ad un *solido di riferimento*, entro il quale possono introdursi, a piacere, coordinate qualsiasi. Anche la formulazione della legge di inerzia fa intervenire direttamente riferimenti solidi, in quiete o in moto traslatorio uniforme rispetto alle stelle fisse (riferimenti galileiani).

Il passaggio da un riferimento solido assoluto, $\mathcal{T} = \mathrm{O}\, \boldsymbol{c}_1\, \boldsymbol{c}_2\, \boldsymbol{c}_3$ ad un riferimento rigido S comunque in moto rispetto a questo si traduce poi, assai semplicemente, con l'intervento delle cosidette forze apparenti (*forze di trascinamento* e *forze di Coriolis*).

Quali altri termini vengono ad aggiungersi se si toglie la restrizione che S sia rigido o, in forma equivalente, come si modificano i teoremi classici di composizione delle velocità e delle accelerazioni, quindi la legge d'inerzia, passando da un riferimento rigido ad un riferimento fluido? Come vedremo, le considerazioni che seguono valgono a ritrovare, anche in campo classico, equazioni di moto perfettamente analoghe a quelle della relatività generale.

Si noti che il problema qui trattato riguarda, in particolare, anche lo studio del moto di un punto vincolato ad appartenere ad una linea deformabile o ad una superficie deformabile (cfr. ad esempio [10], p. 377).

4. - IL TEOREMA DEI MOTI RELATIVI E IL TEOREMA DI CORIOLIS NEI RIFERIMENTI FLUIDI.

Siano: S un sistema continuo tridimensionale in moto regolare rispetto ad una prefissata terna cartesiana $\mathcal{T} = \mathrm{O}\, \boldsymbol{c}_1\, \boldsymbol{c}_2\, \boldsymbol{c}_3$; C la configurazione attuale di S; C_* una configurazione di riferimento scelta a piacere fra tutte quelle compatibili per S, ad esempio la configurazione iniziale.

Indicate con (X^α) e (x^α) $(\alpha = 1, 2, 3)$ le coordinate (valutate sempre rispetto alla terna cartesiana $\mathcal{T}$) della generica particella P di S, in C e C_* rispettivamente, il moto del sistema continuo sarà rappresentato da equazioni

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 20 aprile 1963.

(4) Le (17) definiscono in generale una serie ∞^1 di trasformazioni dello spazio in se stesso. Dànno luogo ad un gruppo ad un parametro solo se il moto di S è *stazionario*, nel qual caso le linee di corrente $\equiv$ linee di flusso dànno le traiettorie del gruppo.

del tipo

(17) $$X^\alpha = f^\alpha (x^1, x^2, x^3, t)$$ [4],

ovvero dalle inverse

(17′) $$x^\alpha = g^\alpha (X^1, X^2, X^3, t) \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

(t variabile tempo). Naturalmente il continuo S, che assumeremo come nuovo sistema di riferimento in luogo di $\mathcal{T}$, ha carattere puramente ideale, è tale cioè da non turbare, con la sua presenza, i fenomeni fisici che ad esso si intendono riferiti.

Ciò posto, si consideri un punto materiale M e siano

(18) $$X^\alpha = X^\alpha (t)$$

le sue equazioni di moto rispetto al riferimento $\mathcal{T}$.

Ad ogni istante il punto M è sovrapposto ad una ben determinata particella P di riferimento, la quale ha, a sua volta, una ben determinata *immagine* in C_*. Le (18) individuano pertanto in C_* il movimento di un punto rappresentativo, M_* le cui equazioni sono:

(19) $$x^\alpha = x^\alpha (t) \equiv g^\alpha [X^1 (t), X^2 (t), X^3 (t), t].$$

La costanza delle x^α si ha soltanto se M, durante il suo moto, si mantiene sovrapposto ad una stessa particella di S, cioè quando M coincide con una delle particelle del fluido e quindi la sua traiettoria (18) corrisponde ad una delle ∞^3 linee di corrente (17).

L'annullarsi delle x^α è dunque condizione necessaria e sufficiente perché M *sia in quiete rispetto al fluido* S.

In ogni caso, assegnato che sia il moto di M rispetto a $\mathcal{T}$ [formule (18)] le (19) forniscono il corrispondente moto rappresentativo di M_* in C_*. Viceversa, assegnato che sia quest'ultimo mediante equazioni del tipo $x^\alpha = x^\alpha (t)$, si passa immediatamente al moto di M rispetto a $\mathcal{T}$:

(20) $$X^\alpha (t) = f^\alpha [x^1 (t), x^2(t), x^3(t), t].$$

Da queste, derivando totalmente rispetto al tempo, si ottiene

(21) $$\dot{X}^\alpha (t) = \partial_\beta f^\alpha \dot{x}^\beta + \partial_t f^\alpha \qquad (\partial_\beta \equiv \partial/\partial x^\beta, \partial_t \equiv \partial/\partial t).$$

Tali relazioni si possono riassumere in una sola condizione vettoriale; precisamente, cominciamo col sintetizzare le equazioni di moto (17) del fluido S scrivendo

(17″) $$OP = OP (x^1, x^2, x^3, t) \equiv f^\alpha (x^1, x^2, x^3, t) \, \boldsymbol{c}_\alpha.$$

Siano poi

(22) $$\boldsymbol{v} = \partial_t \, OP \quad , \quad \boldsymbol{a} = \partial_t \partial_t \, OP$$

rispettivamente, la velocità e l'accelerazione rispetto a $\mathcal{T}$ della particella di riferimento P e

(23) $$\mathbf{V} = \frac{d\,OM}{dt} \quad , \quad \mathbf{A} = \frac{d^2\,OM}{dt^2}$$

la velocità e l'accelerazione di M rispetto alla stessa terna.

Continuando ad indicare con P la particella di riferimento che allo istante t è sovrapposta ad M, le (20) si possono sintetizzare nella relazione vettoriale

$$\mathrm{OM}(t) = \mathrm{OP}[x^1(t), x^2(t), x^3(t), t]. \tag{20'}$$

Di qui, ponendo

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \partial_\alpha \mathrm{OP} \equiv \partial_\alpha f^\beta \boldsymbol{c}_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{24}$$

si ricava, come equivalente della (21),

$$\mathbf{V} = \dot{x}^\beta \partial_\beta \mathrm{OP} + \partial_t \mathrm{OP} = \dot{x}^\beta \boldsymbol{e}_\beta + \boldsymbol{v}. \tag{21'}$$

Nella relazione ora scritta $\boldsymbol{v}$ si può ben interpretare come *velocità di trascinamento* di M e

$$\mathbf{v} = \dot{x}^\beta \boldsymbol{e}_\beta \tag{25}$$

(che si annulla solo se la particella è in quiete relativa al fluido) come *velocità* di M *relativa* ad S: la (21′) traduce quindi *il teorema dei moti relativi.*

Passando alle accelerazioni è del tutto spontaneo chiamare $\boldsymbol{a}$ *accelerazione di trascinamento* di M; e *accelerazione relativa* ad S il vettore

$$\mathbf{a} = \ddot{x}^\beta \partial_\beta \mathrm{OP} + \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial_\alpha \partial_\beta \mathrm{OP} = \ddot{x}^\beta \boldsymbol{e}_\beta + \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta \tag{26}$$

ottenuto derivando due volte rispetto al tempo il secondo membro della (20′) ma tenendo conto *soltanto* della variabilità delle x^α; cioè pensando il riferimento S *fissato* nella sua posizione all'istante t.

Ciò posto, derivando totalmente la (21′) rispetto al tempo, si ottiene l'analogo del *teorema di Coriolis*:

$$\mathbf{A} = \ddot{x}^\beta \partial_\beta \mathrm{OP} + \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \partial_\alpha \partial_\beta \mathrm{OP} + 2\dot{x}^\beta \partial_t \partial_\beta \mathrm{OP} + \partial_t \partial_t \mathrm{OP} = \mathbf{a} + \boldsymbol{a} + 2\dot{x}^\beta \partial_\beta \boldsymbol{v}. \tag{27}$$

Il vettore $\partial_\beta \boldsymbol{v}$ riassume, come verrà precisato tra un momento, la velocità angolare locale del fluido e la sua deformazione nell'intorno di M.

Si noti esplicitamente che se il moto di S è rigido la (17″) assume, indicando con Ω un punto di S e con $\boldsymbol{e}_\alpha$ i versori di una terna solidale, la forma esplicita $\mathrm{OP} = \mathrm{O}\Omega(t) + x^\beta \boldsymbol{e}_\beta(t)$. Si ha allora $\partial_\alpha \mathrm{OP} = \boldsymbol{e}_\alpha$, $\partial_\beta \boldsymbol{e}_\alpha = 0$ e naturalmente si ritrovano, per la velocità e l'accelerazione relativa e di trascinamento, le ordinarie espressioni. Al tempo stesso l'identità

$$\partial_\beta \boldsymbol{v} \equiv \partial_t \boldsymbol{e}_\beta \tag{28}$$

viene a scriversi, utilizzando le formule di *Poisson*, $\partial_\beta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{e}_\beta$, essendo $\boldsymbol{\omega}(t)$ la velocità angolare di S; quindi l'ultimo termine della (27) si riduce alla ordinaria accelerazione di *Coriolis*.

Osservazione. – È bene sottolineare il fatto che la curva l_* definita in C_* dalle equazioni cartesiane (19) (luogo delle immagini delle particelle del fluido di riferimento alle quali M si sovrappone via via durante il suo moto) che si può chiamare la traiettoria di M relativa ad S, non basta ad individuare tutti gli elementi cinematici di M relativi al fluido. La velocità relativa

$$\mathbf{v} = \dot{x}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \equiv (\dot{x}^\alpha \partial_\alpha f^\beta) \boldsymbol{c}_\beta,$$

ad esempio, non è che l'*immagine*, in C, del vettore $\dot{x}^\alpha \boldsymbol{c}_\alpha$ di C_* che si calcolerebbe direttamente in base al moto rappresentativo (19); e per la determinazione di tale immagine interviene, in modo essenziale, anche il moto del fluido. Per l'accelerazione si confronti la (41).

5. – Velocità angolare locale e velocità di deformazione del fluido.

Per precisare il significato cinematico del vettore $\partial_\alpha \boldsymbol{v}$ che interviene nell'ultimo termine della (27), cominciamo coll'introdurre le quantità, funzioni di x^1, x^2, x^3, t

$$\gamma_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \partial_\alpha \mathrm{OP} \cdot \partial_\beta \mathrm{OP} \tag{29}$$

e insieme i reciproci (5), $\gamma^{\alpha\beta}$ che permettono di passare dalla *base* $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ alla cobase $\{\boldsymbol{e}^\alpha\}$ (6) definita dai vettori

$$\boldsymbol{e}^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\beta . \tag{30}$$

Utilizzando gli ordinari simboli di *Christoffel* di 1° e di 2° specie costruiti con i coefficienti $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$(\alpha\beta , \delta) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \gamma_{\beta\delta} + \partial_\beta \gamma_{\delta\alpha} - \partial_\delta \gamma_{\alpha\beta}) \quad , \quad \left\{ {\nu \atop \alpha\beta} \right\} = \gamma^{\nu\delta} (\alpha\beta , \delta), \tag{31}$$

è agevole esprimere il derivato $\partial_\alpha \boldsymbol{v}$ per il tramite dei vettori della base $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ o della cobase $\{\boldsymbol{e}^\alpha\}$.

Dall'identità (cfr. [9] p. 126 e anche [8])

$$\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \left\{ {\delta \atop \alpha\beta} \right\} \boldsymbol{e}_\delta , \tag{32}$$

mettendo in evidenza le componenti controvarianti di $\boldsymbol{v}$, $v^\alpha = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha$ (sicché $\boldsymbol{v} = v^\beta \boldsymbol{e}_\beta$) si trae infatti:

$$\partial_\alpha \boldsymbol{v} = \left(\partial_\alpha v^\beta + \left\{ {\beta \atop \alpha\delta} \right\} v^\delta\right) \boldsymbol{e}_\beta \equiv \nabla_\alpha v^\beta \boldsymbol{e}_\beta . \tag{33}$$

D'altra parte, come conseguenza della (32) e dell'identità

$$\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta \equiv \gamma_{\alpha\delta} \gamma^{\beta\delta} = \delta_\alpha^\beta \tag{34}$$

si ricava, in parallelo alla (32),

$$\partial_\alpha \boldsymbol{e}^\beta = - \left\{ {\beta \atop \alpha\delta} \right\} \boldsymbol{e}^\delta ; \tag{32'}$$

in modo che, introducendo le componenti covarianti di $\boldsymbol{v}$, $v_\alpha = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_\alpha$ (sicché $\boldsymbol{v} = v_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha$) la (33) si scrive anche

$$\partial_\alpha \boldsymbol{v} = \left(\partial_\alpha v_\beta - \left\{ {\delta \atop \alpha\beta} \right\} v_\delta\right) \boldsymbol{e}^\beta \equiv \nabla_\alpha v_\beta \boldsymbol{e}^\beta . \tag{33'}$$

(5) Si osservi che $\gamma = \det \| \gamma_{\alpha\beta} \|$ è senz'altro positivo, coincidendo col quadrato dello Jacobiano relativo alla trasformazione (17).

(6) Esse individuano i *riferimenti naturali* nello spazio tangente in P a C (riferita alle coordinate curvilinee x^α) e nello spazio duale.

Fissando l'attenzione su quest'ultima espressione di $\partial_\alpha \boldsymbol{v}$, decomponiamo il tensore $\nabla_\alpha v_\beta$ nelle sue due parti, simmetrica e antisimmetrica rispettivamente. Poniamo cioé:

$$\nabla_\alpha v_\beta = \frac{1}{2}(K_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta}) \tag{35}$$

essendo

$$\begin{cases} K_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\beta + \partial_\beta \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\alpha \\ \Omega_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta - \nabla_\beta v_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\beta - \partial_\beta \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\alpha\,. \end{cases} \tag{36}$$

I due tensori ora introdotti sono suscettibili di una notevole interpretazione cinematica. Per quanto riguarda il tensore simmetrico $K_{\alpha\beta}$, cominciamo con l'osservare che, in base all'identità (28), esso è anche suscettibile della espressione

$$K_{\alpha\beta} = \partial_t(\boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_\beta) = \partial_t\,\gamma_{\alpha\beta}\,. \tag{37}$$

Si vede bene di qui che l'annullarsi di $K_{\alpha\beta}$ implica l'indipendenza della metrica $\gamma_{\alpha\beta}$ dalla variabile t e viceversa. Anzi *la condizione* $K_{\alpha\beta} = 0$, *intesa valida in tutto* C_* *e per ogni* t, *è necessaria e sufficiente perché il moto di* S *sia rigido* (7).

Ciò giustifica, per $K_{\alpha\beta}$, la denominazione di tensore velocità di deformazione del fluido.

D'altra parte il tensore antisimmetrico $\Omega_{\alpha\beta}$, che si può anche scrivere

$$\Omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha v_\beta - \partial_\beta v_\alpha\,, \tag{38}$$

ammette un vettore aggiunto che corrisponde al rotore di $\boldsymbol{v}$:

$$\Omega_\alpha = \frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta\gamma}\,\Omega^{\beta\gamma} = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_\alpha$$

($\eta_{\alpha\beta\gamma}$ = tensore di *Ricci*). Quest'ultimo, diviso per due, definisce un vettore

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{4}\,\boldsymbol{e}^\alpha \wedge \Omega_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{e}^\beta \tag{39}$$

(7) La cosa si può riconoscere in vari modi (cfr. ad esempio [1] p. 238, ovvero [12], p. 60). Un'altra dimostrazione è la seguente.

Assunta la configurazione iniziale di S coincidente con C_*, quindi $f^\alpha(x^1, x^2, x^3, 0) \equiv x^\alpha$, la condizione

$$K_{\alpha\beta} = 0 \dots C_*, t$$

equivale all'altra $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3) = \gamma_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, 0)$, ovvero $\gamma_{\alpha\beta} \equiv \boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_\beta = \boldsymbol{c}_\alpha\cdot\boldsymbol{c}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Segue di qui l'annullarsi dei simboli di *Christoffel* (31), cioè dalla (32) $\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = 0$; in modo che la *terna* $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$, *oltre ad essere ortonormale, è indipendente da* P_*: $\boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha(t)$. La (24) fornisce allora per integrazione

$$OP = O\Omega(t) + x^\alpha\,\boldsymbol{e}_\alpha(t) \qquad (\boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{c}_\alpha \quad \text{per} \quad t = 0)$$

essendo $O\Omega$ una arbitraria funzione vettoriale di t, nulla per $t = 0$; ciò che prova l'asserto.

che notoriamente può intepretarsi come *velocità angolare* locale del fluido S [8].

6. – FORMULAZIONE RELATIVA DELLA LEGGE D'INERZIA E TEOREMA DELL'ENERGIA NEI RIFERIMENTI FLUIDI.

Vediamo ora come si traduce, in forma relativa al fluido di riferimento S, la classica legge d'inerzia $m\mathbf{A} = 0$.

Dalla (27) si ha direttamente, isolando l'accelerazione della particella relativa ad S:

$$m\mathbf{a} = - m\boldsymbol{a} - 2\, m\, \dot{x}^{\beta}\, \partial_{\beta} \boldsymbol{v} \,, \tag{40}$$

equazione che ora esprimeremo successivamente in forma controvariante e covariante.

(8) È notevole la circostanza che, se *ad un determinato istante t* $K_{\alpha\beta}$ è identicamente nullo in tutto C_*:

$$K_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta} + \partial_{\beta} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{\alpha} = 0 \cdots C_* \,, \tag{a}$$

in quell'istante l'atto di moto del sistema continuo è rigido.

La cosa è quasi intuitiva, poiché nell'intervallo t, $t + dt$ sono soddisfatte le ipotesi della nota precedente. Per una dimostrazione rigorosa, cominciamo con l'osservare che dall'identità $(\alpha\beta\,,\gamma) = \partial_{\alpha} \boldsymbol{e}_{\beta} \cdot \boldsymbol{e}_{\gamma}$ si trae, derivando rispetto al tempo e tenendo conto delle (37) e (28)

$$\partial_t (\alpha\beta\,,\gamma) \equiv \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} K_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} K_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma} K_{\alpha\beta}) = \partial_{\alpha\beta} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{\gamma} + \partial_{\alpha} \boldsymbol{e}_{\beta} \cdot \partial_{\gamma} \boldsymbol{v} \,.$$

L'ipotesi (*a*) ha pertanto come conseguenza

$$\partial_{\alpha\beta} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{\gamma} = - \partial_{\alpha} \boldsymbol{e}_{\beta} \cdot \partial_{\gamma} \boldsymbol{v} \qquad (\alpha\,,\beta\,,\gamma = 1\,,2\,,3)\,, \tag{b}$$

relazione che permette di esprimere le derivate seconde di $\boldsymbol{v}$ per il tramite delle derivate prime. D'altra parte, valendo la (a), il tensore $\Omega_{\alpha\beta}$ assume la forma

$$\Omega_{\alpha\beta} = - 2\, \partial_{\beta} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{\alpha} = 2\, \partial_{\alpha} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta} \,; \tag{c}$$

ciò che dà, per semplice derivazione, tenuto conto della (*b*),

$$\partial_{\gamma} \Omega_{\alpha\beta} = 2\, (\partial_{\alpha} \boldsymbol{v} \cdot \partial_{\gamma} \boldsymbol{e}_{\beta} - \partial_{\beta} \boldsymbol{v} \cdot \partial_{\gamma} \boldsymbol{e}_{\alpha}) \,. \tag{d}$$

Ciò posto, partendo dalla (39), determiniamo l'espressione del tensore $\partial_{\gamma} \boldsymbol{\omega}$:

$$\partial_{\gamma} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{4} (\partial_{\gamma} \boldsymbol{e}^{\alpha} \wedge \Omega_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{e}^{\beta} + \boldsymbol{e}^{\alpha} \wedge \partial_{\gamma} \Omega_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{e}^{\beta} + \boldsymbol{e}^{\alpha} \wedge \Omega_{\alpha\beta}\, \partial_{\gamma} \boldsymbol{e}^{\beta}) \,.$$

Utilizzando la (*c*) si ricava

$$\partial_{\gamma} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left[- \partial_{\gamma} \boldsymbol{e}^{\alpha} \wedge (\partial_{\beta} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{\alpha})\, \boldsymbol{e}^{\beta} + \frac{1}{2}\, \boldsymbol{e}^{\alpha} \wedge \partial_{\gamma} \Omega_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{e}^{\beta} + \boldsymbol{e}^{\alpha} \wedge (\partial_{\alpha} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta})\, \partial_{\gamma} \boldsymbol{e}^{\beta} \right]$$

ovvero, tenendo conto della (32'),

$$\partial_{\gamma} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{e}^{\delta} \wedge \left(\partial_{\beta} \boldsymbol{v} \cdot \left\{ {\alpha \atop \gamma\delta} \right\} \boldsymbol{e}_{\alpha} \right) \boldsymbol{e}^{\beta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{e}^{\alpha} \wedge \partial_{\gamma} \Omega_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{e}^{\beta} - \boldsymbol{e}^{\alpha} \wedge \left(\partial_{\alpha} \boldsymbol{v} \cdot \left\{ {\beta \atop \gamma\delta} \right\} \boldsymbol{e}_{\beta} \right) \boldsymbol{e}^{\delta} \right]$$

e quindi in definitiva [cfr. (32) e (*d*)]

$$\partial_{\gamma} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{e}^{\delta} \wedge (\partial_{\beta} \boldsymbol{v} \cdot \partial_{\gamma} \boldsymbol{e}_{\delta})\, \boldsymbol{e}^{\beta} + \boldsymbol{e}^{\alpha} \wedge (\partial_{\alpha} \boldsymbol{v} \cdot \partial_{\gamma} \boldsymbol{e}_{\beta} - \partial_{\beta} \boldsymbol{v} \cdot \partial_{\gamma} \boldsymbol{e}_{\alpha})\, \boldsymbol{e}^{\beta} - \boldsymbol{e}^{\alpha} \wedge (\partial_{\alpha} \boldsymbol{v} \cdot \partial_{\gamma} \boldsymbol{e}_{\delta})\, \boldsymbol{e}^{\delta} \right] = 0 \,;$$

ciò che prova l'asserto.

Cominciamo con l'osservare che, utilizzando l'identità (32), la (26) si scrive

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{x}^\delta + \left\{ {\delta \atop \alpha\beta} \right\} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\right) \boldsymbol{e}_\delta ,$$

ovvero

$$\mathbf{a} = \frac{D\dot{x}^\delta}{dt} \boldsymbol{e}_\delta \tag{41}$$

essendo D il simbolo di differenziazione assoluta. Facendo intervenire la quantità di moto relativa al fluido di riferimento S,

$$\boldsymbol{p} = m\mathbf{v} = m\dot{x}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \tag{42}$$

e tenendo conto delle (33) e (35), il principio d'inerzia (40) assume la forma

$$\frac{Dp^\alpha}{dt} \boldsymbol{e}_\alpha = - ma^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha - p^\beta (K_\beta{}^\alpha + \Omega_\beta{}^\alpha) \boldsymbol{e}_\alpha ,$$

o l'equivalente controvariante

$$\frac{Dp^\alpha}{dt} = - ma^\alpha - p^\beta (K_\beta{}^\alpha + \Omega_\beta{}^\alpha) . \tag{43}$$

D'altra parte la (26) si può anche scrivere, avuto riguardo alle (25) e (28),

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \dot{x}^\beta \partial_\beta \boldsymbol{v} \tag{44}$$

ovvero, utilizzando le identità $\mathbf{v} = v_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha (v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} v^\beta, v^\beta = \dot{x}^\beta)$, $\frac{d\boldsymbol{e}^\alpha}{dt} = \partial_t \boldsymbol{e}^\alpha + \partial_\beta \boldsymbol{e}^\alpha \dot{x}^\beta$, nonché la (32′),

$$\mathbf{a} = \left(\dot{v}_\delta - \left\{ {\beta \atop \alpha\delta} \right\} v_\beta \dot{x}^\alpha\right) \boldsymbol{e}^\delta + v_\beta \partial_t \boldsymbol{e}^\beta - \dot{x}^\beta \partial_\beta \boldsymbol{v} .$$

Nei termini entro la parentesi si riconosce la derivata assoluta rispetto al tempo di v_δ: Dv_δ/dt. Pertanto la (40) si può anche scrivere così:

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} \boldsymbol{e}^\alpha = - m\boldsymbol{a} - p_\beta \partial_t \boldsymbol{e}^\beta - p^\beta \partial_\beta \boldsymbol{v} . \tag{45}$$

Si noti che il primo membro della (45), a differenza di quello della (43), non corrisponde all'intera accelerazione relativa, in modo che il secondo membro non può prestarsi ad una definizione *completa* di forza.

Potendosi scrivere successivamente [cfr. (28) e (37)]

$$p_\beta \partial_t \boldsymbol{e}^\beta = p^\delta \gamma_{\beta\delta} \partial_t \boldsymbol{e}^\beta = p^\delta (\partial_t \boldsymbol{e}_\delta - \boldsymbol{e}^\beta \partial_t \gamma_{\beta\delta}) = p^\delta (\partial_\delta \boldsymbol{v} - K_{\beta\delta} \boldsymbol{e}^\beta) ,$$

l'equazione (45) assume la forma più espressiva

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} \boldsymbol{e}^\alpha = - m\boldsymbol{a} - 2 p^\delta \partial_\delta \boldsymbol{v} + p^\delta K_{\beta\delta} \boldsymbol{e}^\beta$$

ovvero, tenuto conto delle (33′) e (35), nonché dell'identità $\Omega_{\delta\beta} \boldsymbol{e}^\beta \equiv 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{e}_\delta$

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} \boldsymbol{e}^\alpha = - m\boldsymbol{a} + p^\delta \Omega_{\beta\delta} \boldsymbol{e}^\beta = - m\boldsymbol{a} - 2m \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} . \tag{45′}$$

Si rilevi che in quest'ultima formulazione della legge di inerzia a secondo membro vengono proprio a comparire i campi apparenti della meccanica classica: il *campo di trascinamento* e quello di *Coriolis*, corrispondenti però a riferimenti più generali (cioè fluidi anziché rigidi).

In forma scalare equivalente (covariante) la (45') si scrive

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} = -ma_\alpha + \Omega_{\alpha\beta}\, p^\beta. \tag{46}$$

Prefissato il moto del riferimento S rispetto a $\mathcal{T}$ (e quindi note le funzioni $\gamma_{\alpha\beta}$, a_α, $\Omega_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$) la (43) o la equivalente (46) forniscono un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine nelle $x^\alpha(t)$ atto a determinare univocamente il moto rappresentativo della particella M entro il riferimento S, non appena siano assegnate le condizioni iniziali.

Naturalmente, almeno in generale, la velocità relativa $\mathbf{v}$ della particella non sarà costante neppure in grandezza. In altre parole, introdotta l'energia cinetica relativa di M:

$$T = \frac{1}{2} m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2} m v^2, \tag{47}$$

risulterà generalmente $dT/dt \neq 0$.

Infatti, riprendiamo l'equazione (40) che si può scrivere, tenendo conto della (44),

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\boldsymbol{a} - m\dot{x}^\beta\, \partial_\beta \boldsymbol{v}$$

nonché [cfr. (33') e 35)]

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\boldsymbol{a} - \frac{1}{2} m\,(K_{\beta\alpha} + \Omega_{\beta\alpha})\, \dot{x}^\beta\, \boldsymbol{e}^\alpha.$$

Moltiplicando scalarmente i due membri per $\mathbf{v} = \dot{x}^\delta \boldsymbol{e}_\delta$ si ottiene direttamente

$$\frac{dT}{dt} = -ma_\alpha\, \dot{x}^\alpha - \frac{1}{2} m K_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \tag{48}$$

ciò che in sostanza corrisponde al classico teorema dell'energia.

Si noti che equazioni perfettamente analoghe alle (43), (46) e (48) si scrivono, come si è visto nella Nota I, in relatività generale, per una particella liberamente gravitante.

7. – Esempio.

A titolo di esempio, consideriamo un moto rettilineo ed uniforme (rispetto alla terna $\mathcal{T}$) ed esaminiamolo da un riferimento fluido S per il quale si abbia:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(t) \quad , \quad a_\alpha = 0 \quad , \quad \Omega_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad K_{\alpha\beta} = k(t)\,\gamma_{\alpha\beta}.$$

Si tratta evidentemente di un riferimento geodetico, irrotazionale ma non rigido, essendo non nullo il tensore velocità di deformazione. A ciascun istante lo spostamento di S rientra tra gli spostamenti cosidetti *omogenei* (cfr. [12], p. 62), $\boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha(t)$, ecc.

In un siffatto riferimento la (46) assume la forma $\frac{dp_\alpha}{dt} = 0$ [9] e dà quindi luogo a

$$p_\alpha = \text{cost.} = m\gamma_{\alpha\beta}(0)\,\dot{x}_0^\beta = m\dot{x}_0^\alpha .$$

Tuttavia le componenti controvarianti della quantità di moto non sono costanti, essendo $p^\alpha \equiv \gamma^{\alpha\beta}(t)\,p_\beta$; quindi il moto non è in generale nè rettilineo nè uniforme. Precisamente si ha, con una semplice quadratura, dalla ultima relazione:

$$x^\alpha(t) = x_0^\alpha + \sum_1^3{}_\beta\, \dot{x}_0^\beta \int_0^t \gamma^{\alpha\beta}(t)\,dt . \tag{49}$$

Per quanto riguarda la grandezza della velocità conviene utilizzare, anziché le equazioni di moto ora scritte, il teorema dell'energia (48) che fornisce direttamente

$$\frac{d\mathrm{v}^2}{dt} = -\frac{1}{2}\,k(t)\,\gamma_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta = -\frac{1}{2}\,k(t)\,\mathrm{v}^2$$

ovvero, integrando,

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_0^2\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^t k(t)\,dt} \tag{50}$$

Particolarizzando ulteriormente il tensore $\gamma_{\alpha\beta}$ nella forma seguente:

$$\gamma_{\alpha\beta} = e^{2ct/\mathrm{R}}\,\delta_{\alpha\beta}$$

(c ed R costanti positive) [10] risulta $\mathrm{K}_{\alpha\beta} = \partial_t\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2c}{\mathrm{R}}\gamma_{\alpha\beta}$, $k(t) = \frac{2c}{\mathrm{R}}$ e la (49) assume la forma

$$x^\alpha(t) = x_0^\alpha - \frac{\mathrm{R}}{2c}\,\dot{x}_0^\alpha\,(e^{-2ct/\mathrm{R}} - 1) .$$

La traiettoria relativa risulta ora una retta, come nel riferimento $\mathcal{C}$; ma la grandezza della velocità non è costante, come si riconosce dalla (50) che si riduce a

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_0^2\, e^{-\frac{c}{\mathrm{R}}t} :$$

a causa dell'espansione del fluido, la velocità tende evidentemente a zero.

(9) Essendo la metrica $\gamma_{\alpha\beta}$ dipendente solo da t si annullano tutti i simboli di *Christoffel* e la derivazione assoluta si riduce alla derivazione ordinaria.

(10) Si tratta della metrica spaziale dell'Universo di *de Sitter* (cfr. [11], p. 364).

BIBLIOGRAFIA.

[1] P. APPEL, *Mécanique rationnelle*, Vol. III – Gauthier – Villars – Paris (1909), p. 238.
[2] C. CATTANEO, « Il Nuovo Cimento », *10* (1958).
[3] C. CATTANEO, « Il Nuovo Cimento », *11* (1959).
[4] C. CATTANEO, « Il Nuovo Cimento », *13* (1959).
[5] C. CATTANEO, « Annali di Matematica », XLVIII (1959).
[6] C. CATTANEO, « Rendiconti Accad. Nazionale Lincei », serie VIII, vol. XXVII (1959).
[7] C. CATTANEO, *Formulation relative des lois Physiques en relativité générale*, Corso tenuto al College de France (dicembre 1961 – gennaio 1962).
[8] G. FERRARESE, « Rendiconti di matematica », *1–2* (1963).
[9] B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna (1962).
[10] G. KRALL, « Rendiconti Accad. Nazionale Lincei », serie VIII, vol. XIX (1955).
[11] C. MÖLLER, *The theory of relativity*, Oxford, Clarendon Press (1952).
[12] A. SIGNORINI, *Lezioni di Fisica matematica dell'anno 1952–53*, Veschi, Roma.