ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

DOUGLAS DERRY

Approssimazione di una curva di L_n d'ordine n con un poligono dello stesso ordine. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.5, p. 511–516.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_5_511_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Approssimazione di una curva di L_n d'ordine n con un poligono dello stesso ordine.* Nota III di DOUGLAS DERRY, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Se S designa un qualsiasi insieme finito di spazi osculatori di una curva differenziabile C_n , d'ordine n , nello spazio proiettivo reale di dimensione n , in questa Nota si dà una costruzione di un poligono approssimante, π_n , tale che ogni spazio di S è anche spazio osculatore di π_n . Come applicazione di questo risultato ed utilizzando un risultato analogo dell'autore [4] per poligoni, se ne inferisce che al più $2n - 2$ tangenti di una curva C_n intersecano uno spazio lineare L_{n-2} di dimensione $n - 2$. Si definisce quindi opportunamente una molteplicità per le tangenti intersecanti uno spazio L_{n-2} , tale che il numero di tangenti di C_n intersecanti L_{n-2} , computate secondo detta molteplicità, rimane al più $2n - 2$.

La numerazione dei paragrafi di questa Nota continua quella delle Note lincee precedenti.

6. — LE CURVE C_n .

6.1. Denoteremo con C_n una curva differenziabile d'ordine n , cioè una curva la quale:

(1) è un'immagine topologica nello spazio proiettivo reale di dimensione n di un cerchio;

(2) è differenziabile;

(3) è tale che nessun iperpiano ne contenga più di n punti.

Da (1) segue che i numeri reali s modulo 1 possono individuare biunivocamente i punti di C_n . Col simbolo s denoteremo tanto il numero s che il punto corrispondente di C_n . Secondo (2), esiste il limite $[s_1, s_2, \dots, s_{k+1}]$, per $s_1, s_2, \dots, s_{k+1} \rightarrow s$, $0 \leq k \leq n - 1$, che denoteremo col simbolo (k, s) . Sia s_1 un punto fisso di una curva C_n , $n > 1$, ed s' la proiezione di un punto s di C_n da s_1 su di un iperpiano. L'insieme di tutti i punti s' assieme alla traccia s'_1 di $(1, s_1)$ è una curva C_{n-1} . Se $s \neq s_1$, la proiezione di (k, s) è lo spazio osculatore $(k, s)'$ di C_{n-1} , $0 \leq k \leq n - 2$; mentre la traccia di (k, s_1) , $1 \leq k \leq n - 1$, è lo spazio osculatore $(k - 1, s_1)'$ di C_{n-1} .

7. — POLIGONI ISCRITTI.

7.1. Se $s_1, s_2, s_1 \neq s_2$, sono punti di una curva C_n , si dice che il segmento della retta congiungente s_1, s_2 , assieme a cui l'arco dei punti s di $C_n \{s: s_1 \leq s \leq s_2\}$ forma una curva *p a r i*, è *iscritto* in C_n .

(*) Nella seduta dell'11 maggio 1963.

Se $A_1, A_2, \dots, A_r$ sono, rispettivamente, i punti $s_1, s_2, \dots, s_r$, $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_r < 1$ di una curva C_n , si dice che l'insieme dei segmenti iscritti $A_i A_{i+1}$, $1 \leq i \leq r$, in C_n è un *poligono iscritto* in C_n .

Un poligono iscritto $A_1 A_2 \dots A_r$ in una curva C_n , $r > n$, ha ordine n .

7.2. Se i punti $s_{r-n+1}, s_{r-n+2}, \dots, s_r, s_1, \dots, s_n$, $0 \leq s_{r-n+1} < s_{r-n+2} < \dots < s_r < s_1 < \dots < s_n < 1$, di una curva C_n sono, rispettivamente, i vertici $A_{r-n+1}, A_{r-n+2}, \dots, A_r, A_1, \dots, A_n$ della porzione $A_{r-n+1} A_{r-n+2} \dots A_r A_1 \dots A_n$ di un poligono $\pi_n: A_1 A_2 \dots A_r$, $r \geq 2n$, iscritta in C_n , se A_{r+1} è un punto s_{r+1} di C_n , $s_r < s_{r+1} < s_1$, e se i segmenti $A_r A_{r+1}, A_{r+1} A_1$ sono iscritti in C_n , allora il poligono $A_1 A_2 \dots A_r A_{r+1}$ ha ordine n .

Dimostrazione. - Nel caso $n = 1$, C_1 è la retta proiettiva. Se A_i, A_{i+1} sono, rispettivamente, i punti s_i, s_{i+1} , $s_i < s_{i+1}$, di C_1 , l'arco $A_i A_{i+1}$ denoterà l'insieme $\{s: s_i \leq s \leq s_{i+1}\}$. Dalla definizione del segmento $A_i A_{i+1}$ iscritto nell'arco $A_i A_{i+1}$, segue che in questo caso particolare il segmento è l'arco stesso. Allora il segmento $A_r A_1$ del teorema è l'arco dei punti $\{s: s_r \leq s \leq s_1\}$ ed i segmenti $A_r A_{r+1}, A_{r+1} A_1$, rispettivamente, sono gli insiemi $\{s: s_r \leq s \leq s_{r+1}\}, \{s: s_{r+1} \leq s \leq s_1\}$. Ne segue che, se $\pi_1: A_1 A_2 \dots A_r$ è la retta proiettiva, $A_r A_2 \dots A_r A_{r+1}$ è anche la retta proiettiva e quindi ha ordine 1.

Così il teorema è vero per $n = 1$. Assumiamo quindi $n > 1$.

Poiché $r \geq 2n$, i poligoni $A_{r-n+1} A_{r-n+2} \dots A_r A_1 A_2 \dots A_n$, $A_{r-n+1} \dots A_{r-n+2} \dots A_r A_{r+1} A_1 \dots A_n$ iscritti in C_n sono poligoni π'_n, π''_n d'ordine n . Se $S(A_r A_1)$ è definito per π'_n , segue da 3.3 che la porzione aperta $A_r A_{r+1} A_1$ di π''_n è contenuta in $S(A_r A_1)$. Per definizione, $S(A_r A_1)$ è l'insieme delle intersezioni

$$\bigcap_{i=r-n+2}^{i=r+1} L(A_i A_{i+1} \dots A_{i+n-2}).$$

Secondo 2.1, uno spazio $L(A_i A_{i+1} \dots A_{i+n-2})$ dipende soltanto dalla porzione $A_{i-1} A_i \dots A_{i+n-1}$. Quindi gli spazi $L(A_i A_{i+1} \dots A_{i+n-2})$ dipendono soltanto dalla porzione $A_{r-n+1} A_{r-n+2} \dots A_r A_1 \dots A_n$ del poligono π'_n . Ma, poiché $r \geq 2n$, questa porzione di π'_n è anche una porzione di π_n . Quindi $S(A_r A_1)$, definito per π_n , non differisce da $S(A_r A_1)$ definito per π'_n . Ne segue che la porzione aperta $A_r A_{r+1} A_1$ di π''_n è contenuta in $S(A_r A_1)$, definito per π_n . Mediante 4.5 (3), ne risulta che $A_1 A_2 \dots A_r A_{r+1}$ ha ordine n , onde il teorema è dimostrato.

Poiché A_{r+1} era un punto interno qualsiasi dell'arco $A_r A_1$ dei punti $s \{s: s_r \leq s \leq s_1 + 1\}$, si deduce che l'arco aperto $A_r A_1$ è un sottoinsieme di $S(A_r A_1)$.

7.3. Se ogni lato di una porzione

$\sigma: A_{r-n+1} A_{r-n+2} \dots A_r A_1 A_2 \dots A_n$ di un poligono (chiuso)

$\pi_n: A_1 A_2 \dots A_r$, $r \geq 2n$, $n > 1$, viene iscritto in una curva C_n , ogni lato della proiezione $\sigma': A'_{r-n+1} A'_{r-n+2} \dots A'_{r-1} A'_1 A'_2 \dots A'_n$ di σ da A_r , viene iscritto nella proiezione C_{n-1} di C_n da A_r .

Dimostrazione. - I numeri $s_{r-n+1}, s_{r-n+2}, \dots, s_r, s_1, \dots, s_n$ che definiscono, rispettivamente, i punti $A_{r-n+1}, A_{r-n+2}, \dots, A_r, A_1, \dots, A_n$ di C_n possono

venire scritti in modo tale che $0 \leq s_{r-n+1} < s_{r-n+2} < \dots < s_r < s_1 < \dots < s_n < 1$. Siano: s' la proiezione del punto s di C_n da s_r , $s \neq s_r$; s'_r quella di $(1, s)$ e π_{n-1} quella di π_n . L'arco $A'_{r-1} A'_1$ di C_{n-1} è l'insieme $\{s' : s'_{r-1} \leq s' \leq s'_1\}$, mentre ogni altro arco $A'_i A'_{i+1}$ di C_{n-1} è l'insieme $\{s' : s'_i \leq s' \leq s'_{i+1}\}$. Occorre mostrare che ogni arco siffatto di C_{n-1} , assieme al lato corrispondente di π_{n-1} , forma una curva pari. Basta far vedere che esiste, per ogni arco e lato corrispondenti, un iperpiano L_{n-2} dello spazio di proiezione che non li intersechi. Un tale iperpiano $L_{n-2} = [A'_2, A'_3, \dots, A'_n]$, che intersechi π_{n-1} e C_{n-1} negli $n-1$ punti $A'_2, A'_3, \dots, A'_n$, non contiene né un punto dell'arco $\{s' : s'_{r-n+1} \leq s' \leq s'_1\}$ né un punto della porzione $A'_{r-n+1} A'_{r-n+2} \dots A'_{r-1} A'_1$ di σ' . Ne segue che $A'_{r-n+1} A'_{r-n+2}, A'_{r-n+2} A'_{r-n+3}, \dots, A'_{r-1} A'_1$ risultano iscritti in C_{n-1} . In modo simile, mediante $[A'_{r-n+1}, A'_{r-n+2}, \dots, A'_{r-1}]$, si dimostra che $A'_1 A'_2, A'_2 A'_3, \dots, A'_{n-1} A'_n$ risultano iscritti in C_{n-1} , onde il risultato resta stabilito.

7.4. Se $\pi'_{n-1} : A_1 A_2 \dots A_n A'_{n+1} \dots A'_{r-1} B_r \dots B_{r+k-1}$, $n > 1$, $k > 0$, è un'estensione della proiezione $\pi_{n-1} : A_1 A_2 \dots A_n A'_{n+1} \dots A'_{r-1}$ di un poligono $\pi_n : A_1 A_2 \dots A_r$ dal vertice A_r sull'iperpiano $[A_1, A_2, \dots, A_n]$, allora esiste un'estensione $\pi'_n : A_1 A_2 \dots A_r A_{r+1} \dots A_{r+k}$ di π_n tale che ciascun lato $A_i A_{i+1}$ sia sottosegmento di un segmento $A_i B_i$, $r \leq i \leq r+k-1$.

Dimostrazione. — Secondo 4.5 (2) e 4.1, esiste un poligono $\pi_{n-1} : B_1 B_2 \dots B_{r-1}$ tale che π_n soddisfi alle seguenti condizioni. $A_1 A_2 \dots A_n$ coincida con $B_1 B_2 \dots B_n$; $A_{n+1} A_n$ sia arbitrario, eccetto per $A_{n+1} \notin [A_1, A_2, \dots, A_n]$, i segmenti $A_i B_i$, vengano definiti con sottosegmenti $A_i A_{i+1}, A_{i+1} B_i$, $n+1 \leq i < r$, per i quali i triangoli formati da $A_{i+1} B_i, A_{i+1} B_{i+1}$ e dal lato $B_i B_{i+1}$ di π_{n-1} siano pari (dispari), $n+1 \leq i < r-1$ ($i = n$).

Mostreremo dapprima che i semplici $\bar{S}(B_{r-1} B_1), \bar{S}(A'_{r-1} A_1)$ coincidono. Da 4.4 e 4.5 (1) segue che $\bar{S}(B'_{r-1} B_1)$ è la faccia $P_1 P_2 \dots P_n$ di $\bar{S}(A_r A_1)$, ed inoltre $P_1 = A_1 = B_1$, $P_2 = [A_1, A_2] \cap [A_r, A_{r-1}, \dots, A_{r-n+1}] = [B_1, B_2] \cap [B_{r-1}, B_{r-2}, \dots, B_{r-n+1}]$, $\dots$, $P_n = [A_1, A_2, \dots, A_n] \cap [A_r, A_{r-1}] = B_{r-1}$. Da 3.2 (2) segue che $\bar{S}(A'_{r-1} A_1)$ è la faccia $P_1 P_2 \dots P_n$ di $\bar{S}(A_r A_1)$ e $P_1 = A_1$, $P_2 = [A_1, A_2] \cap [A'_{r-1}, A'_{r-2}, \dots, A'_{r-n+1}]$, $\dots$, $P_n = A'_{r-1}$. Così $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$ e $\bar{S}(A'_{r-1} A_1)$ coincidono.

Se $\overline{P_i P_{i+1}}$, $1 \leq i \leq n-1$, è il segmento complementare nella retta proiettiva della i -faccia $P_i P_{i+1}$ del semplice $\bar{S}(A'_{r-1} A_1)$, dal fatto che $A_1 A_2 \dots A_n A'_{n+1} \dots A'_{r-1} B_r \dots B_{r+k-1}$ sia un'estensione di $A_1 A_2 \dots A_n A'_{n+1} \dots A'_{r-1}$ e tenuto conto di 5.1 segue che $\overline{P_1 P_2 \dots P_n} B_r \dots B_{r+k-1}$ ha ordine $n-1$. Inoltre, ancora mediante 5.1, da quanto sopra e dal fatto che $P_1 P_2 \dots P_n$ è il semplice $\bar{S}(B_{r-1} B_1)$ segue che $B_1 B_2 \dots B_{r-1} B_r \dots B_{r+k-1}$ è un poligono $\bar{\pi}'_{n-1}$ d'ordine $n-1$. Ora, servendosi della costruzione 4.1, si può definire l'estensione $A_1 A_2 \dots A_r \dots A_{r+k}$. I segmenti $A_i B_{i-1}$, $n+1 \leq i \leq r$, erano definiti sopra con sottosegmenti $A_i A_{i+1}, A_{i+1} B_i$, $n+1 \leq i < r$. Sia $B_{r+k} = B_1 = A_1$. Allora, dato che $A_i B_{i-1}$, $r \leq i \leq r+k$, è già costruito, sia $A_i B_i$ il segmento tale che il triangolo che consiste di $A_i B_i, A_i B_{i-1}$ e del lato $B_i B_{i+1}$ di $\bar{\pi}'_{n-1}$ è pari o dispari a secondo che $i > n+1$ o $i = n+1$. Nel caso $i < r+k$, sia A_{i+1} un punto interno qualsiasi di $A_i B_i$, e siano

$A_i A_{i+1}, A_{i+1} B_i$ i sottosegmenti determinati da esso. Così vengono definiti il lato $A_i A_{i+1}$ della cercata estensione ed il segmento $A_{i+1} B_i$. Si può procedere per induzione fino ad $i = r + k$, ed allora l'estensione $A_1 A_2 \cdots A_r \cdot A_{r+1} \cdots A_{r+k}$ risulta definita. Essa ha ordine n , secondo 4.3. Ovviamente $A_i A_{i+1}$ è sottosegmento di $A_i B_i, r \leq i \leq r + k - 1$, onde il risultato resta stabilito.

7.5. Se $s_{r-n+1}, s_{r-n+2}, \dots, s_r, s_1, \dots, s_n, 0 \leq s_{r-n+1} < s_{r-n+2} < \dots < s_r < s_1 < \dots < s_n < 1$, sono i punti di una curva C_n che sono, rispettivamente, i vertici $A_{r-n+1}, A_{r-n+2}, \dots, A_r, A_1, \dots, A_n$ della porzione $A_{r-n+1} A_{r-n+2} \cdots \cdots A_r A_1 \cdots A_n$ di un poligono $\pi_n: A_1 A_2 \cdots A_r, r \geq 2n$, iscritta in C_n , allora esiste un'estensione $\pi'_n: A_1 A_2 \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+n-1}$ di π_n per la quale gli spazi osculatori (k, s_r) di C_n sono, rispettivamente, $[A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+k}], 0 \leq k \leq n - 1$.

Dimostrazione. - Se $n = 1$, i poligoni π_1, π'_1 coincidono ed il teorema diviene banale. Assumendolo stabilito per le curve $C_{n-1}, n > 1$, dimostriamolo per una curva C_n .

Siano, rispettivamente, s' la proiezione del punto s di $C_n, s \neq s_r, s'$ quella della tangente $(1, s_r)$ di C_n , e $\pi_{n-1}: A'_1 A'_2 \cdots A'_{r-1}$ quella di π_n , tutte dal punto s_r , sull'iperpiano $[A_1, A_2, \dots, A_n]$. Segue, da 7.3, che la proiezione $A'_{r-n+1} A'_{r-n+2} \cdots A'_{r-1} A'_1 \cdots A'_n$ di $A_{r-n+1} A_{r-n+2} \cdots A_r A_1 \cdots A_n$ viene iscritta in C_{n-1} . Siano B_r il punto s'_r dell'arco $\{s': s'_{r-1} \leq s' \leq s'_1\}$ di C_{n-1} ed $A'_{r-1} B_r, B_r A'_1$ segmenti iscritti in C_{n-1} . Segue, da 7.2 che $A'_1 A'_2 \cdots A'_{r-1} B_r$ è un poligono d'ordine $n - 1$. Se (k, s'_r) denota uno spazio osculatore di C_{n-1} , segue dall'assunzione che esiste un'estensione $\pi'_{n-1}: A'_1 A'_2 \cdots A'_{r-1} B_r \cdot B_{r+1} \cdots B_{r+n-2}$ per la quale $[B_r, B_{r+1}, \dots, B_{r+k}] = (k, s'_r)', 0 \leq k \leq n - 2$. Ora, secondo 7.4 esiste un'estensione $\pi'_n: A_1 A_2 \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+n-1}$ tale che A_{i+1} sia punto interno di un segmento $A_i B_i, r \leq i \leq r + n - 2$. Ne segue che $[A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+k}] = [A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+k-1}, B_{r+k-1}] = \dots = [A_r, B_r, \dots, B_{r+k-1}] = [A_r, (k-1, s'_r)'], 1 \leq k \leq n - 1$. Ma, da 6.1, $(k-1, s'_r)'$ è la proiezione di (k, s_r) da $A_r (= s_r), 1 \leq k \leq n - 1$. Quindi $[A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+k}] = (k, s_r), 0 \leq k \leq n - 1$. Così il teorema è vero per una curva C_n , onde l'asserto segue tosto per induzione.

7.6. Se $s_1, s_2, \dots, s_p, 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p < 1$, sono punti di una curva C_n , esiste un poligono $\pi_n: A_1 A_2 \cdots A_r$ che ha p porzioni $A_{m_i} A_{m_i+1} \cdots \cdots A_{m_i+n-1}, 1 \leq i \leq p$, senza punti in comune due a due, per le quali $[A_{m_i}, A_{m_i+1}, \dots, A_{m_i+k}] = (k, s_i), 0 \leq k \leq n - 1, 1 \leq i \leq p$.

Dimostrazione. - Si scelgano, fra ogni coppia di punti s_i, s_{i+1} consecutivi n punti distinti $s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^n$, per i quali $s_i^1 < s_i^2 < \dots < s_i^n < s_{i+1}, 1 \leq i \leq p, (s_{p+1} = s_1 + 1)$. Se S è l'insieme dei punti $s_i, s_i^j, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$, sia π_n il poligono $A_1 A_2 \cdots A_r$ iscritto in C_n i cui vertici siano i punti di S . Cambiando gli indici, se è necessario, si può arrivare ad una porzione $A_{r-n+1} A_{r-n+2} \cdots A_r A_1 \cdots A_n$ di π_n per la quale A_r sia il punto s_1 . Poiché $r \geq 2n$, segue da 7.5 che esiste un poligono $\pi'_n: A_1 A_2 \cdots A_r A_{r+1} \cdots A_{r+n-1}$ d'ordine n per cui $[A_r, A_{r+1}] = (1, s_1), [A_r, A_{r+1}, A_{r+2}] = (2, s_1), \dots, [A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+n-1}] = (n-1, s_1)$. In altri termini, π'_n è un poligono che contiene una porzione $A_{m_i} A_{m_i+1} \cdots A_{m_i+n-1}$ per cui $[A_{m_i}, A_{m_i+1}, \dots, A_{m_i+k}] =$

$= (k, s_1)$, $0 \leq k \leq n-1$. Cominciando con π_n^1 ed il punto s_2 , si può costruire similmente un poligono π_n^2 che contiene due porzioni $A_{m_1} A_{m_1+1} \cdots A_{m_1+n-1}$, $A_{m_2} A_{m_2+1} \cdots A_{m_2+n-1}$, senza punti in comune, per le quali $[A_{m_i}, A_{m_i+1}, \cdots, A_{m_i+k}] = (k, s_i)$, $1 \leq i \leq 2$, $0 \leq k \leq n-1$. Procedendo in questo modo fino al punto s_p , si ottiene un poligono π_n^p che gode delle proprietà richieste.

8. - APPLICAZIONE ALLE CURVE C_n .

8.1. Mediante 7.6, per ogni insieme finito di tangenti $(1, s_i)$, $1 \leq i \leq p$, di una curva C_n , $n \geq 2$, si può costruire un poligono $\pi_n: A_1 A_2 \cdots A_r$ per cui $[A_{j_1}, A_{j_1+1}] = (1, s_1), \cdots, [A_{j_p}, A_{j_p+1}] = (1, s_p)$. Segue da un teorema dell'autore [4] che al più $2n-2$ rette $[A_i, A_{i+1}]$ definite da un poligono $\pi_n: A_1 A_2 \cdots A_r$ intersecano uno spazio arbitrario L_{n-2} di dimensione $n-2$. Ne risulta che:

Al più $2n-2$ tangenti di una curva C_n , $n > 1$, intersecano uno spazio arbitrario L_{n-2} .

8.2. Si può definire opportunamente una molteplicità per le tangenti di una curva C_n , $n > 1$, che intersecano uno spazio L_{n-2} , in guisa da migliorare il risultato precedente. Se L_{n-2} denota uno spazio fisso ed s è un punto di una curva C_n , sia $e(s)$ il numero massimo k per cui $[L_{n-2}, (k, s)]$ ha dimensione $n-1$; sia $i(s)$ il numero massimo k per cui $(k, s) \subseteq L_{n-2}$. Conveniamo che, se $s \notin L_{n-2}$, $i(s) = -1$.

Dimostriamo che

$$\sum_s (e(s) + i(s) + 1) \leq 2n - 2.$$

Supponiamo dapprima $L_{n-2} \cap C_n = \emptyset$. Ne segue che è $i(s) + 1 = 0$ per tutti i punti s di C_n . Siano s_i , $1 \leq i \leq p$, punti di C_n con $e(s_i) > 0$. Allora esistono spazi (k_i, s_i) , $k_i = e(s_i) > 0$ per i quali $[L_{n-2}, (k_i, s_i)]$ hanno dimensione $n-1$, $1 \leq i \leq p$. Servendosi di 7.6, si può costruire un poligono $\pi_n: A_1 A_2 \cdots A_r$ che contiene porzioni $A_{i_1} A_{i_1+1} \cdots A_{i_1+k_1}$, $A_{i_2} A_{i_2+1} \cdots A_{i_2+k_2}$, $\cdots$, $A_{i_p} A_{i_p+1} \cdots A_{i_p+k_p}$ per le quali $[A_{i_1}, A_{i_1+1}, \cdots, A_{i_1+k_1}] = (k_1, s_1)$, $[A_{i_2}, A_{i_2+1}, \cdots, A_{i_2+k_2}] = (k_2, s_2)$, $\cdots$, $[A_{i_p}, A_{i_p+1}, \cdots, A_{i_p+k_p}] = (k_p, s_p)$. Dunque, dall'ipotesi, si ha che $[L_{n-2}, A_{i_1}, A_{i_1+1}, \cdots, A_{i_1+k_1}]$ ha dimensioni $n-1$. Si conclude che le k_1 rette $[A_{i_1}, A_{i_1+1}]$, $[A_{i_1+1}, A_{i_1+2}]$, $\cdots$, $[A_{i_1+k_1-1}, A_{i_1+k_1}]$ intersecano L_{n-2} . Trattando gli altri spazi in modo simile, si vede che almeno $k_1 + k_2 + \cdots + k_p$ rette $[A_i, A_{i+1}]$ intersecano L_{n-2} . Dal risultato dell'autore accennato sopra segue che $e(s_1) + e(s_2) + \cdots + e(s_p) \leq 2n-2$. Si conclude che, se $L_{n-2} \cap C_n = \emptyset$, allora $\sum_s (e(s) + i(s) + 1) \leq 2n-2$.

Supponiamo ora che L_{n-2} contenga un punto $\bar{s}$ di C_n . Nel caso $n=2$, $L_{n-2} = L_0 = \bar{s}$, $e(\bar{s}) = 1$, $i(\bar{s}) = 0$, ma $e(s) = 0$, $i(s) = -1$, $s \neq \bar{s}$. Quindi $\sum_s (e(s) + i(s) + 1) = 2$, ed il risultato è stabilito per una curva C_2 . Assumendolo per le curve C_{n-1} , $n > 2$, dimostriamolo per una curva C_n .

Mediante 6.1 si può costruire la tabella seguente relativa ad una proiezione dal punto $\bar{s}$.

Originale	C_n	$s, s \neq \bar{s}$	$(1, s)$	L_{n-2}	$(k, s), s \neq \bar{s}, 0 \leq k \leq n-2$
Proiezione	C_{n-1}	s'	$\bar{s}'$	L_{n-3}	$(k, s)'$
Originale		$(k, \bar{s}), 1 \leq k \leq n-1$			
Proiezione		$(k-1, s)'$			

Siano $e(s'), i(s')$ i numeri suddetti definiti per C_{n-1} . Se, per $s \neq \bar{s}$, $[L_{n-2}, (k, s)]$ ha dimensione $n-1$, segue che $k \leq n-2$, poiché $\bar{s} \notin (n-1, s)$. In questo caso si vede, mediante la tabella, che $[L_{n-3}, (k, s)']$ ha dimensione $n-2$ e quindi $e(s) \leq e(s')$. Se $[L_{n-2}, (k, \bar{s})]$ ha dimensione $n-1$, allora $k > 0$, poiché $\bar{s} \in L_{n-2}$. Di nuovo, dalla tabella, si vede che $e(s) \leq e(\bar{s}') + 1$. Se, per $s \neq \bar{s}$, $(k, s) \subseteq L_{n-2}$, allora $k \leq n-2$, poiché $\bar{s} \notin (n-1, s)$. Quindi, secondo la tabella, $(k, s)' \subseteq L_{n-3}$ ed $i(s) \leq i(s'), s \neq \bar{s}$. Poiché $\bar{s} \in L_{n-2}$, esiste uno spazio $(k, \bar{s})$ tale che $(k, \bar{s}) \subseteq L_{n-2}, k \geq 0$. Quindi $(k-1, \bar{s}')' \subseteq L_{n-3} ((-1, \bar{s}')' = \emptyset)$ ed $i(\bar{s}) \leq i(\bar{s}') + 1$. Ora si ha $\sum_s (e(s) + i(s) + 1) = \sum_{s \neq \bar{s}} (e(s) + i(s) + 1) + e(\bar{s}) + i(\bar{s}) + 1 \leq \sum_{s' \neq \bar{s}'} (e(s') + i(s') + 1) + e(\bar{s}') + i(\bar{s}') + 3 = \sum_{s'} (e(s') + i(s') + 1) + 2$. Ma si sa, in base all'assunto, applicato a C_{n-1} , che $\sum_{s'} (e(s') + i(s') + 1) \leq 2n-4$. Ne segue che $\sum_s (e(s) + i(s) + 1) \leq 2n-2$. Così il teorema è vero per una curva C_n onde l'asserto segue per induzione.

BIBLIOGRAFIA.

- [4] D. DERRY, *A rank number for a class of polygons* « Ann. di Mat. pura ed applicata », 54, 285-294 (1961).