
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

SILVIU GUIASU

La répartition asymptotique des sommes aléatoires de variables aléatoires indépendantes non identiquement distribuées

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.5, p.
504–510.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_5_504_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *La répartition asymptotique des sommes aléatoires de variables aléatoires indépendantes non identiquement distribuées.*
Nota di SILVIU GUIASU, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Nous donnons ici un théorème sur la répartition asymptotique des sommes aléatoires de variables aléatoires indépendantes, non identiquement distribuées. Le théorème, que nous appelons t. 3, représente l'extension au cas des sommes aléatoires de variables aléatoires, indépendantes, non identiquement distribuées, d'un théorème, que nous appelons t. 1, que nous avons démontré dans un travail précédent, relatif au cas d'une suite de variables aléatoires quelconques. Pour réaliser cette extension nous avons du passer par un théorème intermédiaire que nous appelons t. 2. Ce travail continue les travaux [9] et [2].

1. - NOTATIONS.

Soit:

- $\in$ — le symbole logique qui signifie «... appartient à...»;
- $\subset$ — le symbole logique qui signifie «chacun des... appartient à»;
- $\cup$ — le symbole logique qui signifie «aumoins un entre...»;
- $\cap$ — le symbole logique qui signifie «... et...»;
- $\{E, \mathcal{K}, P\}$ — un champ de probabilité constitué par l'ensemble $\mathcal{K}$ des événements E , de probabilité P , qui peuvent se présenter dans une épreuve;
- $\Omega^2(E, \mathcal{K}, P)$ — l'ensemble des variables aléatoires de carré intégrable définies sur le champ de probabilité $\{E, \mathcal{K}, P\}$;
- (SK) — l'ensemble des familles de variables aléatoires indépendantes dans le sens de Steinhaus - Kaç;
- M_1, M_2 — les moments de premier ordre et de deuxième ordre;
- $P_B(A)$ — la probabilité de l'événement A ($A \in \mathcal{K}$) conditionnée par l'événement B ($B \in \mathcal{K}, P(B) > 0$);
- $[q]$ — la partie entière du nombre q ;
- N — l'ensemble des nombres naturels;
- $\xrightarrow{P}$ — la convergence en probabilité dans le sens de F. P. Cantelli [1];
- $P\{\xi | \lambda(\xi) = \lambda_s\}$ — la probabilité que, dans une épreuve sur le champ de probabilité pris en considération, la valeur numérique de la variable aléatoire λ , définie sur ce champ, soit λ_s .

(*) Nella seduta dell'11 maggio 1963.

2. — PRÉLIMINAIRES.

Dans le travail [2] nous avons démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — Soit $(Y_n)_{1 \leq n < \infty}$ une suite de variables aléatoires définies sur le camp de probabilité $\{E, \mathcal{H}, P\}$, et $(N_n)_{1 \leq n < \infty}$ une suite de variables aléatoires, avec des valeurs entières positives, définies aussi sur $\{E, \mathcal{H}, P\}$. Soit $(w_n)_{1 \leq n < \infty}$ une suite de nombres positifs, $(n_r)_{1 \leq r < \infty}$ une suite croissante des nombres entiers positifs, qui tendent vers l'infini avec r , θ un nombre réel et $F(a)$ une fonction de distribution.

Si nous avons les conditions suivantes :

$$(I) \quad (C_1) \quad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \lambda$$

où λ est une variable aléatoire positive sur $\{E, \mathcal{H}, P\}$ avec les valeurs : $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$;

(C_2) dans tous les points de continuité de $F(a)$:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{A_k} \{ \xi | Y_n(\xi) - \theta \leq aw_n \} = F(a)$$

pour toutes les valeurs k ($k = 1, 2, \dots$) pour lesquelles $P(A_k) > 0$ où :

$$A_k = \{ \xi | \lambda(\xi) = \lambda_k \};$$

(C_3) pour chaque $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ il existe un nombre naturel $n_0(\varepsilon, \eta)$ et un nombre petit $c(\varepsilon, \eta) > 0$, de telle sorte que pour $n \geq n_0(\varepsilon, \eta)$ nous ayons :

$$(3) \quad P \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m \in J_{k,n}} \{ \xi | |Y_m(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi)| \geq \varepsilon w_{[n\lambda_k]} \} \cap \{ \xi | \lambda(\xi) = \lambda_k \} \right) < \eta$$

où $J_{k,n}$ est l'intervalle ouvert :

$$J_{k,n} = [n\lambda_k] - cn, [n\lambda_k] + cn \cap N$$

alors, dans tous les points de continuité de $F(a)$, nous aurons :

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P \{ \xi | Y_{N_r}(\xi) - \theta \leq aw_{[n_r \lambda]}(\xi) \} = F(a).$$

COROLLAIRE : Si nous ajoutons une nouvelle condition, sur le comportement de la suite de nombres $(w_n)_{1 \leq n < \infty}$:

$$(5) \quad (C_4) \quad \frac{w_{[n_r \lambda]}}{w_{N_r}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$$

alors, nous pouvons affirmer que :

$$(6) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P \{ \xi | Y_{N_r}(\xi) - \theta \leq aw_{N_r}(\xi) \} = F(a)$$

dans tous les points de continuité de $F(a)$.

Si $\lambda(\xi) \equiv 1$, les conditions (C_1) , (C_2) , (C_3) se réduisent aux conditions classiques de F. J. Anscombe [3].

3. - SOMMES ALÉATOIRES DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES, NON IDENTIQUEMENT DISTRIBUÉES.

Soit maintenant une suite $(x_j)_{1 \leq j < \infty}$ de variables aléatoires vérifiant les conditions suivantes :

- (7) $(x_j)_{1 \leq j < \infty} \in (\text{SK})$
 (8) $(x_j)_{1 \leq j < \infty} \subset \mathcal{L}^2(E, \mathcal{K}, P)$
 (9) $M_1(x_j) = 0 \quad (1 \leq j < \infty).$

Nous considérons les particularisations suivantes :

la suite $(Y_n)_{1 \leq n < \infty}$ ayant pour terme général :

(10) $Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n;$

la suite $(w_r)_{1 \leq r < \infty}$ dont le terme général est :

(11) $w_n = \sqrt{M_2(x_1) + M_2(x_2) + \dots + M_2(x_n)};$

la suite $(n_r)_{1 \leq r < \infty}$ identique à la suite des nombres naturels :

$$n_r \equiv r.$$

Alors :

THÉORÈME 2. - Soit les variables aléatoires $(x_j)_{1 \leq j < \infty}$ avec les conditions (7), (8), (9). La suite $(Y_n)_{1 \leq n < \infty}$ définie par (10), satisfait à la condition (C_3) si :

(12)
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{\lfloor [n\lambda_k] \pm \delta n \rfloor}^2}{w_{\lfloor n\lambda_k \rfloor}^2} = 1 \quad (\delta > 0, k = 1, 2, \dots).$$

Démonstration : Soit les nombres $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ donnés. Soit le nombre naturel $M = M(\eta)$ tel grand que :

(13)
$$P\{\xi \mid \lambda(\xi) \geq \lambda_M\} < \frac{\eta}{4}.$$

La condition (12) implique: pour chaque k ($k = 1, 2, \dots$), il existe un nombre naturel $n_{0,k}(\varepsilon, \eta)$ et un nombre petit $c_k(\varepsilon, \eta) > 0$ de telle sorte que pour $n \geq n_{0,k}(\varepsilon, \eta)$ nous avons :

(14)
$$1 - \frac{w_{\lfloor [n\lambda_k] - c_k n \rfloor}^2}{w_{\lfloor n\lambda_k \rfloor}^2} < \frac{\varepsilon^2}{M-1} \cdot \frac{\eta}{16}$$

et

(15)
$$\frac{w_{\lfloor [n\lambda_k] + c_k n \rfloor}^2}{w_{\lfloor n\lambda_k \rfloor}^2} - 1 < \frac{\varepsilon^2}{M-1} \cdot \frac{\eta}{16}.$$

Soit maintenant

$$n_0 = \max_{k=1,2,\dots,M-1} n_{0,k} \quad \text{et} \quad c = \min_{k=1,2,\dots,M-1} c_k.$$

Alors, pour $n \geq n_0(\varepsilon, \eta)$ nous avons (14) et (15) pour n'importe quel indice k ($k = 1, 2, \dots, M-1$). Nous considérons les intervalles :

$$J_{k,n} =] [n\lambda_k] - cn, [n\lambda_k] + cn[\cap N$$

et alors :

$$(16) \quad P \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m \in J_{k,n}} \{ \xi \parallel Y_m(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi) \mid \geq \varepsilon w_{[n\lambda_k]} \} \cap \{ \xi \mid \lambda(\xi) = \lambda_k \} \right) \\ \leq \sum_{k=1}^{M-1} P \left(\bigcup_{m \in J_{k,n}} \{ \xi \parallel Y_m(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi) \mid \geq \varepsilon w_{[n\lambda_k]} \} \right) + P \{ \xi \mid \lambda(\xi) \geq \lambda_M \}.$$

Pour tous k ($1 \leq k \leq M-1$) :

$$(17) \quad P \left(\bigcup_{m \in J_{k,n}} \{ \xi \parallel Y_m(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi) \mid \geq \varepsilon w_{[n\lambda_k]} \} \right) \\ \leq P \left(\bigcup_{m \in J_{k,n}} \{ \xi \parallel Y_{[n\lambda_k]}(\xi) - Y_{[n\lambda_k] - cn}(\xi) \mid + \mid Y_{[n\lambda_k] - cn}(\xi) - Y_m(\xi) \mid \geq \varepsilon w_{[n\lambda_k]} \} \right) \\ \leq P \{ \xi \parallel Y_{[n\lambda_k]}(\xi) - Y_{[n\lambda_k] - cn}(\xi) \mid + \max_{[n\lambda_k] - cn < m < [n\lambda_k] + cn} \mid Y_{[n\lambda_k] - cn}(\xi) - Y_m(\xi) \mid \geq \varepsilon w_{[n\lambda_k]} \} \\ \leq P \{ \xi \parallel Y_{[n\lambda_k]}(\xi) - Y_{[n\lambda_k] - cn}(\xi) \mid \geq \frac{\varepsilon}{2} w_{[n\lambda_k]} \} \\ + P \{ \xi \mid \max_{[n\lambda_k] - cn < m < [n\lambda_k] + cn} \mid Y_{[n\lambda_k] - cn}(\xi) - Y_m(\xi) \mid \geq \frac{\varepsilon}{2} w_{[n\lambda_k]} \}.$$

Si nous utilisons l'inégalité de Tschebitschev ⁽¹⁾ nous avons :

$$(18) \quad P \{ \xi \parallel Y_{[n\lambda_k]}(\xi) - Y_{[n\lambda_k] - cn}(\xi) \mid \geq \frac{\varepsilon}{2} w_{[n\lambda_k]} \} = \\ P \left\{ \xi \parallel \sum_{j=[n\lambda_k] - cn + 1}^{[n\lambda_k]} x_j(\xi) \right\} \geq \frac{\varepsilon}{2} w_{[n\lambda_k]} \Bigg\} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot \frac{w_{[n\lambda_k]}^2 - w_{[n\lambda_k] - cn}^2}{w_{[n\lambda_k]}^2}.$$

Si nous utilisons maintenant l'inégalité de Kolmogorov ⁽²⁾ nous avons

$$(19) \quad P \left\{ \xi \mid \max_{[n\lambda_k] - cn < m < [n\lambda_k] + cn} \mid Y_{[n\lambda_k] - cn}(\xi) - Y_m(\xi) \mid \geq \frac{\varepsilon}{2} w_{[n\lambda_k]} \right\} = \\ P \left\{ \xi \mid \max_{[n\lambda_k] - cn < m < [n\lambda_k] + cn} \left| \sum_{j=[n\lambda_k] - cn + 1}^m x_j(\xi) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} w_{[n\lambda_k]} \right\} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot \frac{w_{[n\lambda_k] + cn}^2 - w_{[n\lambda_k] - cn}^2}{w_{[n\lambda_k]}^2}.$$

(1) Soit x une variable aléatoire définie sur $(E, \mathcal{H}, P)$. Si $x \in \mathcal{L}^2(E, \mathcal{H}, P)$ pour chaque $\varepsilon > 0$ nous avons :

$$P \{ \xi \parallel x(\xi) \mid \geq \varepsilon \} \leq \frac{M_2(x)}{\varepsilon^2}.$$

(2) Soit une suite de variables aléatoires $(x_j)_{1 \leq j < \infty}$ qui satisfait les conditions :

$$(x_j)_{1 \leq j < \infty} \subset \mathcal{L}^2(E, \mathcal{H}, P) \quad ; \quad (x_j)_{1 \leq j < \infty} \in (SK).$$

Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$ nous avons :

$$P \left\{ \xi \mid \max_{n \leq r \leq p} \left| \sum_{j=1}^r x_j(\xi) - \sum_{j=1}^r M_1(x_j) \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=n}^p M_2(x_j - M_1(x_j)) \quad (n \geq 1, p \geq n).$$

Introduisons (18) et (19) en (17), nous avons pour tous k ($1 \leq k \leq M-1$) en utilisant les relations (14) et (15):

$$(20) \quad P\left(\bigcup_{m \in J_{k,n}} \{ \xi \| Y_m(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi) | \geq \varepsilon w_{[n\lambda_k]} \}\right) \\ \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot \frac{w_{[n\lambda_k]}^2 - w_{[n\lambda_k] - cn}^2}{w_{[n\lambda_k]}^2} + \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot \frac{w_{[n\lambda_k] + cn}^2 - w_{[n\lambda_k]}^2}{w_{[n\lambda_k]}^2} = \frac{8}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{w_{[n\lambda_k] - cn}^2}{w_{[n\lambda_k]}^2}\right) \\ + \frac{4}{\varepsilon^2} \left(\frac{w_{[n\lambda_k] + cn}^2}{w_{[n\lambda_k]}^2} - 1\right) < \frac{8}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{M-1} \cdot \frac{\eta}{16} + \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{M-1} \cdot \frac{\eta}{16} = \frac{1}{M-1} \cdot \frac{3\eta}{4}.$$

Ensuite, (13), (16) et (20) nous aurons:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m \in J_{k,n}} \{ \xi \| Y_m(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi) | \geq \varepsilon w_{[n\lambda_k]} \} \cap \{ \xi | \lambda(\xi) = \lambda_k \}\right) \\ \leq \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{M-1} \cdot \frac{3\eta}{4} + \frac{\eta}{4} = \eta$$

qui nous montre que la condition (C_3) est satisfaite.

Dans [4] A. Rényi a démontré (avec les notations faites dans ce paragraphe) qu'étant donnée la suite $(Y_n)_{1 \leq n < \infty}$ de terme général: $Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, la suite $(x_j)_{1 \leq j < \infty}$ satisfaisant la condition (7) si:

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{ \xi | Y_n(\xi) - \theta \leq a w_n \} = F(a)$$

dans tous les points de continuité de $F(a)$, alors, dans tous les points de continuité de $F(a)$ on aura la propriété de *strongly mixing* de la suite $\left(\frac{Y_n - \theta}{w_n}\right)_{1 \leq n < \infty}$ c'est-à-dire:

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_B\{ \xi | Y_n(\xi) - \theta \leq a w_n \} = F(a)$$

pour tous les événements $B \in \mathcal{H}$, $P(B) > 0$.

Évidemment, l'égalité (21) implique alors la condition (C_2) du théorème 1, pour les suites de sommes aléatoires de variables aléatoires. Mais alors, en utilisant cet très important résultat de A. Rényi, le théorème 1 devient, dans les conditions de ce paragraphe:

THÉOREME 3. - Soit $(x_j)_{1 \leq j < \infty}$ une suite de variables aléatoires définies sur $\{E, \mathcal{H}, P\}$ satisfaisant aux conditions (7), (8), (9) et la suite $(Y_n)_{1 \leq n < \infty}$ de variables aléatoires de terme général:

$$Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Soit encore $(N_n)_{1 \leq n < \infty}$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières positives, définies aussi sur $\{E, \mathcal{H}, P\}$, $(w_n)_{1 \leq n < \infty}$ une suite de nombres positifs, de terme général:

$$w_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n M_2(x_k)}$$

$F(a)$ une fonction de distribution et θ un nombre réel. Si nous avons:

$$(C'_1) \quad \frac{N_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \lambda$$

où λ est une variable aléatoires positive sur $\{E, \mathcal{K}, P\}$ ayant les valeurs:
 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$;

(C'_2) dans tous les points de continuité de $F(a)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \xi | Y_n(\xi) - \theta \leq a w_n \} = F(a);$$

(C'_3) Pour chaque k ($k = 1, 2, \dots$) nous avons:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{[n\lambda_k] \pm \delta n}^2}{w_{[n\lambda_k]}^2} = 1 \quad (\delta > 0).$$

Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \xi | Y_{N_n}(\xi) - \theta \leq a w_{[n\lambda]}(\xi) \} = F(a)$$

dans tous les points de continuité de $F(a)$.

COROLLAIRE: Si nous avons encore une condition:

$$(C'_4) \quad \frac{w_{[n\lambda]}}{w_{N_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1$$

alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \xi | Y_{N_n}(\xi) - \theta \leq a w_{N_n}(\xi) \} = F(a)$$

dans tous les points de continuité de $F(a)$.

4. - REMARQUES.

a) Si nous considérons que les variables aléatoires x_j ($1 \leq j < \infty$) sont identiquement distribuée, alors $w_n = \sqrt{n}$ pour $M_2(x_j) = 1$. Dans ce cas, d'après une corollaire du théorème classique de Lindeberg, nous avons la condition (C_2) avec la distribution normale comme fonction $F(a)$:

$$F(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\theta = 0).$$

Évidemment, dans ce cas, la condition (C'_3) est aussi satisfaite, parce que:

$$1 \pm \delta \frac{1}{\lambda_k} - \frac{2}{n\lambda_k} \leq \frac{[n\lambda_k] \pm \delta n}{[n\lambda_k]} \leq \frac{1 \pm \delta \frac{1}{\lambda_k}}{1 - \frac{1}{n\lambda_k}}$$

et alors:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\lambda_k] \pm \delta n}{[n\lambda_k]} = 1$$

c'est-à-dire la condition (C'_3) . Enfin, la condition (C'_4) :

$$\sqrt{\frac{[n\lambda]}{N_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1$$

est aussi satisfaite, parce que: $\frac{N_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \lambda$ si nous avons (C'_1) . Alors, dans ce cas, les cas des sommes des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, la condition (C'_1) seule, nous donne que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \xi | Y_{N_n}(\xi) < a \sqrt{N_n(\xi)} \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Ce résultat a été obtenu directement par A. Rényi dans le travail [6].

b) Pour le cas $\lambda(\xi) \equiv 1$, la condition (C'_1) a été obtenu par J. Mogyoródi, dans l'excellent travail [7].

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] F. P. CANTELLI, *La tendenza a un limite nel senso del Calcolo delle probabilità*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » (1916).
- [2] S. GUIASU, *Asymptotic distribution for the random sequences of random variables*, « Revue de Math. Pures et Appl. », t. 8, n. 4 (1963).
- [3] F. J. ANSCOMBE, *Large-sample theory of sequential estimation*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », t. 48, pp. 600–607 (1952).
- [4] A. RÉNYI, *On mixing sequences of sets*, « Acta Math. Acad. Sci. Hung. », t. 9, pp. 215–228 (1958).
- [5] A. RÉNYI, *On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables*, « Acta Math. Acad. Sci. Hung. », t. 8, pp. 193–199 (1957).
- [6] A. RÉNYI, *On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables*, « Acta Math. Acad. Sci. Hung. », t. 11, pp. 97–102 (1960).
- [7] J. MOGYORÓDI, *On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables*, « Publications of the Hung. Acad. Sci. », t. 6, pp. 365–372 (1961).
- [8] O. ONICESCU, *Numere și sisteme aleatoare*, București, Edit. Academiei, 1962.
- [9] S. GUIASU, *La répartition asymptotique pour les suites aléatoires de variables aléatoires*, « C. R. Acad. Sci. Paris », t. 256, 3813–3815 (1963).