Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Octav Onicescu

Sur les fonctions somme au sens large et sur les corrélations somme

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.5, p. 501–503.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_5_501_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Matematica. — *Sur les fonctions somme au sens large et sur les corrélations somme.* Note di OCTAV ONICESCU, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Nous reprenons ici en considération la remarque simple suivante: Le fait que toute fonction à valeurs réelles définie sur un espace E et mesurable par rapport à un corps de parties $\mathcal{K}$, peut être considérée aussi comme integrable – dans un certain sens très général d'ailleurs – par rapport à toute mesure donnée sur $\mathcal{K}$, ouvre des perspectives très larges et utiles, différentes de celles cataloguées à l'aide de la notion d'espace $\mathfrak{L}_p$, dans différents domaines où l'integration joue un rôle fondamental. Nous le montrons ici à l'aide du concept de *fonction somme au sens large.*

2. Soit $f(\xi)$ une fonction mesurable du champ $\{E, \mathcal{K}\}$. La famille des parties

$$\sigma_\alpha = \{\xi \mid |f(\xi)| \leq \alpha\}$$

est évidemment croissante avec α et

$$\lim_{\alpha \to \infty} \sigma_\alpha = E.$$

La distinction suivante s'impose:

a) la famille σ_α est dominante par rapport à $\mathcal{K}$ si, quelque soit $\omega \in \mathcal{K}$ différent de E, il existe un α_ω tel que $\sigma_{\alpha_\omega} \supset \omega$;

b) la famille σ_α est non-dominante par rapport à $\mathcal{K}$, s'il existent des $\omega \in \mathcal{K}$, en dehors de E, tels que aucun σ_α ne soit avec ω dans la relation $\sigma_\alpha \supset \omega$.

PROPOSITION: *Les parties ω dominées par σ_α constituent un treillis distributif $\mathcal{H}_f$.*

En effet si $\omega_1 \subset \sigma_{\alpha_1}$, $\omega_2 \subset \sigma_{\alpha_2}$ il en résulte que

$$\omega_1 \cup \omega_2 \subset \sigma_{\max(\alpha_1, \alpha_2)} \quad ; \quad \omega_1 \cap \omega_2 \subset \sigma_{\min(\alpha_1, \alpha_2)}$$

donc $\omega_1 \cup \omega_2$ et $\omega_1 \cap \omega_2$ appartiennent à $\mathcal{H}_f$ en même temps que ω_1 et ω_2. La distributivité est implicite. D'autre part $\mathcal{H}_f$ n'est pas vide car il contient la famille σ_α *qui est sa propre dominante* (1).

Si nous associons au corps $\mathcal{K}$ une mesure M (ω) finie, pour chaque ω, nous relativisons les relations de dominance en négligeant les ω de mesure nulle. C'est la forme sous laquelle nous utilisons ces relations ici. La dominance sera donc une *dominance en mesure.*

(*) Nella seduta dell'11 maggio 1963.

(1) Les treillis $\mathcal{H}_f$ sont des semitribus (clans contenant les intersections dénombrables d'éléments) suivant une terminologie qui nous a été communiquée verbalement par son auteur N. Dinculeanu.

3. FONCTION SOMME SUPÉRIEURE ET INFÉRIEURE. – Il est évident que chaque integrale

$$\text{(2)} \qquad F(\sigma_\alpha \cap \omega) = \int_{\sigma_\alpha \cap \omega} f(\xi)\, M(d\xi)$$

existe, quelques soient α et ω et que, pour chaque α, $F(\sigma_\alpha \cap \omega)$ est une fonction somme de ω.

Posons, maintenant,

$$\text{(3)} \qquad \overline{F}(\omega) = \limsup_{s \to \infty} F(\sigma_s \cap \omega)$$

$$\text{(4)} \qquad \underline{F}(\omega) = \liminf_{s \to \infty} F(\sigma_s \cap \omega).$$

Il est, alors, évident que *si la famille σ_α est dominante par rapport à $\mathcal{H}$, on a*

$$\text{(5)} \qquad \overline{F}(\omega) = \underline{F}(\omega) = F(\omega)$$

pour chaque ω et que $F(\alpha)$ est une fonction somme; $f(\xi)$ est alors integrable au sens habituel.

Si la famille σ_α n'est pas dominante, l'égalité (5) existe seulement pour les parties ω appartenant au treillis $\mathcal{H}_f$, sur lequel $f(\xi)$ est integrable (integrabilité relative); il y a en même temps des ω différents de E qui ne sont dominés par aucun σ_α pour α fini. Pour ces ω on a

$$\overline{F}(\omega) > \underline{F}(\omega)$$

la première étant une fonction *sous-additive*, la seconde étant *sur-additive*.

$\overline{F}(\omega)$ qui est bien définie pour chaque ω sera la *fonction somme supérieure*, $\underline{F}(\omega)$ sera la *fonction somme inférieure*; elles sont égales pour les ω appartenant au treillis $\mathcal{H}_f$. Si ce treillis est boolén, il existe une fonction $f_{\mathcal{H}}(\xi)$ dont l'integrale sur les parties ω appartenant à $\mathcal{H}_f$ est égale à la fonction somme $F(\omega)$ restreinte à $\mathcal{H}_f$:

$$\text{(6)} \qquad F(\omega) = \int_\omega f_{\mathcal{H}}(\xi)\, M(d\xi) \quad ; \quad \omega \in \mathcal{H}_f .$$

4. LA CONNEXION SOMME. – Si $f(\xi)$ et $g(\xi)$ sont mesurables sur $\{E, \mathcal{H}\}$ il en est de même de leur produit $\pi(\xi) = f(\xi)\, g(\xi)$. Il existe donc en général une connexion somme $\overline{\Pi}(\omega)$ supérieure et une connexion somme $\underline{\Pi}(\omega)$ inférieure, qui sont égales sur le treillis $\mathcal{H}_\Pi$ et jouent le rôle de la connexion somme

$$\Pi(\omega) = \int_\omega f(\xi)\, g(\xi)\, M(d\xi)$$

quand $\pi(\xi) = f(\xi)\, g(\xi)$ n'est pas intégrable. La nécessité théorique et l'utilité pratique de cette extension est évidente, car on ne peut pas continuer a considérer sans connexion où sans *corrélation* deux fonctions qui ne sont pas integrables, même dans le cas où elles sont égales.

Pour donner l'expression de la *corrélation somme* nous utiliserons le fait que *l'intersection des treillis* $\mathcal{H}_f$ *et* $\mathcal{H}_g$ *est un treillis* $(\mathcal{H}_{f,g})$. Soit alors $\omega \in \mathcal{H}_{f,g}$ on aura en vertu des résultats du numéro précédent

$$F(\omega) = \int_{\sigma_{f,\alpha} \cap \omega} f(\xi) \, M(d\xi) \quad ; \quad G(\omega) = \int_{\sigma_{g,\beta} \cap \omega} g(\xi) \, M(d\xi)$$

pour α et β suffisamment grands suivant la valeur de ω. La corrélation somme pour $\omega \in \mathcal{H}_{f,g}$ est alors définie par l'integrale

$$\gamma(\omega) = \int_{\theta_{\alpha,\beta} \cap \omega} [f(\xi) - F(\omega)] \, [g(\xi) - G(\omega)] \, M(d\xi)$$

où

$$\theta_{\alpha,\beta} = \{ \xi \mid |f(\xi)| \leq \alpha \quad , \quad |g(\xi)| \leq \beta \}$$

si α et β sont suffisamment grands. C'est une fonction additive de ω sur $\mathcal{H}_{f,g}$.

L'extension aux parties ω qui n'appartiennent pas à $\mathcal{H}_{f,g}$ nous conduit à une corrélation somme supérieure et à une autre inférieure, dont nous n'avons pas à nous occuper ici.

5. Nous terminons en signalant seulement que des considérations similaires sont valables pour l'extension du produit de composition de deux fonctions f et g définies sur un groupe $\mathcal{S}$, où nous désignons par $-x$ l'inverse de x et par dx la mesure élémentaire invariante sur le groupe. L'expression du produit de composition somme sera de la forme

$$I(y, \omega) = \int_{\theta_{\alpha,\beta;\delta} \cap \omega} f(x) g(y - x) \, dx \quad ; \quad \omega \in \mathcal{H}_{f,g} \quad ; \quad y \in \delta$$

$$\theta_{\alpha,\beta;\delta} = \{ x \mid |f(x)| \leq \alpha \quad ; \quad |g(y - x)| \leq \beta \quad ; \quad y \in \delta \}.$$

δ étant au domaine fermé de $\mathcal{S}$, α et β étant suffisamment grands (en dépendance de ω).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] O. ONICESCU, *Les probabilités sur une Algèbre de Boole*, « C. R. Acad. Sci. Paris », t. 246, pp. 3210–13 (1958).

[2] O. ONICESCU, *Fonctions somme sur une B–Algèbre*, « Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. et Phys. de la R. P. R. », t. 2 (50) București 1959.

[3] ROMULUS CRISTESCU, *Asupra funcțiilor aleatoare care nu admit momente*, « Comunicările Acad. R. P. R. », No. 10, t. XII, pp. 1097–1101 (1962).