
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ANDRÁS KÓSA

Sulle funzioni d'invarianza per i problemi del calcolo delle variazioni unidimensionali di secondo ordine

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.5, p.
494–500.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_5_494_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulle funzioni d'invarianza per i problemi del calcolo delle variazioni unidimensionali di secondo ordine.*
Nota di ANDRÁS KÓSA, presentata ^(*) dal Socio M. PICONE.

Il concetto di funzione d'invarianza, ampiamente utilizzato dal Picone ⁽¹⁾, si mostra utile per dare condizioni sufficienti per l'estremo assoluto dei problemi del calcolo delle variazioni ed ha importanza anche nella separazione degli autovalori delle equazioni differenziali di tipo euleriano. In questa Nota ci occuperemo della struttura delle funzioni d'invarianza per l'integrale

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y', y'') dx$$

ed in relazione a tali funzioni enuncieremo certi risultati.

I. Useremo le seguenti notazioni:

siano $\rho'(x)$, $\rho''(x)$ funzioni date nell'intervallo $[a, b]$, con la condizione

$$\rho'(x) < \rho''(x) \quad \text{per } a \leq x \leq b;$$

definiamo i domini T_0, T_1, T_2 delle variabili $(x, y_0)(x, y_0, y_1)$, (x, y_0, y_1, y_2) nel modo seguente:

$$T_0 = \{a \leq x \leq b, \rho'(x) < y_0 < \rho''(x)\}, \quad T_1 = \{(x, y_0) \in T_0; y_1 \text{ arbitrario}\}$$

$$T_2 = \{(x, y_0) \in T_0; y_1, y_2 \text{ arbitrari}\};$$

sia E la classe delle funzioni $y(x)$, definite e continue, insieme alle loro derivate fino al quarto ordine, nell'intervallo $[a, b]$, verificanti la condizione

$$(x, y(x)) \in T_0 \quad \text{per } a \leq x \leq b.$$

Sia $f(x, y_0, y_1, y_2)$ una funzione data e continua in T_2 . È evidente che il funzionale

$$J_f[y(x)] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x)) dx$$

è definito per ogni $y(x) \in E$.

(*) Nella seduta dell'11 maggio 1963.

L'Autore ringrazia l'Istituto Nazionale di Alta Matematica, che, con una borsa di studio, gli ha permesso di partecipare ai Seminari del prof. G. Fichera e di compiere il presente e i precedenti lavori.

(1) Ved. [1], [2] e [3].

Diamo le seguenti definizioni:

a) si dice che la funzione $v(x, y_0, y_1, y_2)$, definita e continua in T_2 , è una funzione d'invarianza *nel caso degli estremi liberi*, se per ogni funzione $y(x) \in E$ il funzionale $J_v[y(x)]$ ha sempre lo stesso valore;

b) siano dati quattro numeri: $a_0 (\rho'(a) < a_0 < \rho''(a))$, a_1 ; $b_0 (\rho'(b) < b_0 < \rho''(b))$, b_1 . Diciamo che la funzione $v(x, y_0, y_1, y_2)$, definita e continua in T_2 , è una funzione d'invarianza *nel caso degli estremi fissi*, se per ogni funzione $y(x) \in E$ che soddisfa le relazioni

$$(I) \quad y(a) = a_0, y(b) = b_0 \quad ; \quad y'(a) = a_1, y'(b) = b_1$$

il funzionale $J_v[y(x)]$ ha sempre lo stesso valore.

Osservazione I: Sia $F(x, y_0, y_1)$ una funzione definita e continua in T_1 , insieme a tutte le sue derivate parziali. Si vede molto facilmente che la funzione

$$(2) \quad F_x(x, y_0, y_1) + F_{y_0}(x, y_0, y_1)y_1 + F_{y_1}(x, y_0, y_1)y_2$$

è una funzione d'invarianza nel caso degli estremi fissi.

II. Possiamo enunciare il seguente

TEOREMA: *Condizione necessaria affinché la funzione $(f(x, y_0, y_1, y_2))$ sia una funzione d'invarianza è che abbia la forma*

$$(3) \quad f = A(x, y_0, y_1) + B(x, y_0, y_1)y_2$$

in T_2 . Se le funzioni A e B sono di classe due ⁽²⁾, allora condizione necessaria e sufficiente affinché la (3) sia una funzione d'invarianza nel caso degli estremi fissi è che le funzioni A e B soddisfino in T_1 , al sistema di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

$$(4_1) \quad D_1(x, y_0, y_1) = 2 B_{y_0} - A_{y_1 y_1} + B_{xy_1} + B_{y_0 y_1} y_1 = 0,$$

$$(4_2) \quad D_2(x, y_0, y_1) = A_{y_0} - A_{xy_1} + B_{xx} + (2 B_{xy_0} - A_{y_0 y_1}) y_1 + B_{y_0 y_0} y_1^2 = 0;$$

inoltre, nel caso degli estremi liberi, condizione necessaria e sufficiente affinché la (3) sia una funzione d'invarianza è che le funzioni A e B siano soluzioni del sistema (4) con le seguenti condizioni al contorno:

$$(5) \quad \begin{cases} B(a, y_0, y_1) = B(b, y_0, y_1) = 0, \\ B_x(a, y_0, y_1) - A_{y_1}(a, y_0, y_1) = 0, \\ B_x(b, y_0, y_1) - A_{y_1}(b, y_0, y_1) = 0 \end{cases}$$

per $(a_1, y_0, y_1) \in T_1, (b, y_0, y_1) \in T_1$.

(2) Cioè sono funzioni continue insieme a tutte le loro derivate parziali fino al secondo ordine.

Dimostrazione:

La linearità della f in y_2 segue immediatamente dalla ben nota condizione necessaria di Legendre.

a) *Necessità delle condizioni* (4) e (5). - Sia la (3) una funzione d'invarianza nel caso degli estremi fissi. L'equazione di Eulero

$$f_{y_0} - \frac{d}{dx} f_{y_1} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y_2} = 0$$

deve essere un'identità per ogni $y(x) \in E$ che soddisfa la (1). Dopo un breve calcolo si ha:

$$(6) \quad f_{y_0} - \frac{d}{dx} f_{y_1} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y_2} = D_1(x, y(x), y'(x)) \cdot y''(x) + D_2(x, y(x), y'(x)),$$

e dalla (6) segue, ovviamente anche nel caso degli estremi liberi, la necessità delle condizioni (4₁), (4₂).

Nel caso degli estremi liberi, com'è ben noto, devono essere inoltre verificate, nei punti a e b , le condizioni di trasversalità

$$(7) \quad f_{y_2} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dx} f_{y_2} - f_{y_1} = 0.$$

Scrivendo dettagliatamente le condizioni (7) si ottiene la condizione (5).

b) *Sufficienza delle condizioni* (4) e (5). - Prendiamo due funzioni arbitrarie di E : $y_1(x)$, $y_2(x)$ e consideriamo la funzione

$$(8) \quad \varphi(t) = J_f[y_1(x) + t(y_2(x) - y_1(x))] \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1,$$

dove f è del tipo (3).

È evidente che

$$y_1(x) + t(y_2(x) - y_1(x)) \in E \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1,$$

ed anche che la (8) è differenziabile in $(0, 1)$. La derivata ha la forma:

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} f \right) dx = \int_a^b \{ \tilde{f}_{y_0}(y_2 - y_1) + \tilde{f}_{y_1}(y_2' - y_1') + \tilde{f}_{y_2}(y_2'' - y_1'') \} dx^{(3)} \\ &= \int_a^b \left\{ \tilde{f}_{y_0} - \frac{d}{dx} \tilde{f}_{y_1} + \frac{d^2}{dx^2} \tilde{f}_{y_2} \right\} (y_2 - y_1) dx \\ &\quad + \left[\left(\frac{d}{dx} \tilde{f}_{y_2} - \tilde{f}_{y_1} \right) (y_2 - y_1) + \tilde{f}_{y_2} (y_2' - y_1') \right]_{x_1}^{x_2}. \end{aligned}$$

(3) Con il segno $\sim$ vogliamo indicare il fatto che gli argomenti delle funzioni assegnate sono i seguenti:

$$(x, y_1(x) + t(y_2(x) - y_1(x)), y_1'(x) + t(y_2'(x) - y_1'(x)), y_1''(x) + t(y_2''(x) - y_1''(x))).$$

In virtù della (6) si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = & \int_a^b \{ \tilde{D}_1 \cdot (y_2''(x) - y_1''(x)) + \tilde{D}_2 \} dt \\ & + [\{ \tilde{B}_x + \tilde{B}_{y_0} (y_1'(x) + t(y_2'(x) - y_1'(x)) - \tilde{A}_{y_1} \} (y_2(x) - y_1(x)) \\ & + \tilde{B} \cdot (y_2'(x) - y_1'(x))]_a^b, \end{aligned}$$

cioè, tenendo conto delle (1), (4) e (5), in entrambe i casi relativi agli estremi si ha:

$$\varphi'(t) = 0 \quad \text{per} \quad 0 < t < 1,$$

e quindi

$$\varphi(1) = \varphi(0) = J_f[y_2(x)] = J_f[y_1(x)].$$

Con ciò il teorema è dimostrato completamente.

III. È evidente, in seguito all'Osservazione 1, che, supponendo la $F(x, y_0, y_1)$ di classe tre, le funzioni

$$\begin{aligned} A &= F_x(x, y_0, y_1) + F_{y_0}(x, y_0, y_1) \cdot y_1, \\ B &= F_{y_1}(x, y_0, y_1) \end{aligned}$$

soddisfano le equazioni (4₁) e (4₂).

Per costruire delle funzioni d'invarianza d'altro genere, cerchiamo soluzioni delle equazioni (4) nella forma seguente:

$$(9) \quad A = \sum_{i=0}^n \alpha^i(x, y_0) y_1^i, \quad B = \sum_{j=0}^m \beta^j(x, y_0) y_1^j$$

dove $\alpha^i(x, y_0)$, $\beta^j(x, y_0)$ sono funzioni di classe due in T_0 , e si suppone inoltre che

$$(10) \quad \alpha^n(x, y_0) \neq 0, \beta_m^m(x, y_0) \neq 0, (\alpha^n(x, y_0))^2 + (\beta_m^m(x, y_0))^2 \neq 0 \quad \text{in } T_0.$$

Dopo la sostituzione dei polinomi (9) in (4₁) e (4₂), nei secondi membri di queste condizioni compaiono, nell'ordine che segue, polinomi di grado

$$m, n-2, m-1, m \quad \text{in } (4_1),$$

$$n, n-1, m, m+1, n, m+2 \quad \text{in } (4_2).$$

Da ciò, tenendo conto anche della (10), si vede subito che le equazioni (4₁), (4₂) possono avere una soluzione della forma (9) soltanto nel caso

$$n = m + 2.$$

Posto $n = m + 2$, dopo la suddetta sostituzione, si ottiene:

$$D_1 = \sum_{j=0}^m C_1^j(x, y_0) y_1^j = 0, \quad D_2 = \sum_{i=0}^{m+2} C_2^i(x, y_0) y_1^i = 0.$$

Devono quindi essere verificate le equazioni:

$$(11) \quad C_1^j(x, y_0) = 0, \quad C_2^i(x, y_0) = 0 \quad \text{in } T_0,$$

La (11) ci fornisce $2m + 4$ equazioni per la determinazione delle $2m + 4$ funzioni $\alpha^i(x, y_0)$, $\beta^j(x, y_0)$. Dopo un semplice calcolo si ottiene che

$$C_1^m = (m + 2) \beta_{y_0}^m(x, y_0) - (m + 2)(m + 1) \alpha^{m+2}(x, y_0),$$

$$C_2^{m+2} = \beta_{y_0 y_0}^m(x, y_0) - (m + 1) \alpha_{y_0}^{m+2}(x, y_0) \equiv (m + 2) \frac{\partial}{\partial y_0} C_1^m,$$

cioè il numero delle equazioni indipendenti in (11), è sempre minore del numero delle funzioni α^i, β^j .

Consideriamo, come esempio, il caso $m = 0$. Si prende allora

$$A = \alpha^0(x, y_0) + \alpha^1(x, y_0) y_1 + \alpha^2(x, y_0) y_1^2,$$

$$B = \beta^0(x, y_0).$$

Dopo un breve calcolo si ha:

$$C_1^0 = 2 \beta_{y_0}^0 - 2 \alpha^2,$$

$$C_2^0 = \alpha_{y_0}^0 - \alpha_x^1 + \beta_{xx}^0,$$

$$C_2^1 = -2 \alpha_x^2 + 2 \beta_{x y_0}^0 \equiv \frac{\partial}{\partial x} C_1^0,$$

$$C_2^2 = \beta_{y_0 y_0}^0 - \alpha_{y_0}^2 \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_0} C_1^0.$$

Se si sceglie, ad arbitrio, le funzioni $\beta^0(x, y_0)$ e $\alpha^1(x, y_0)$, dalle condizioni $C_1^0 = C_2^0 = 0$ risulta che la funzione

$$(12) \quad f = \int \{ \alpha_x^1(x, y_0) - \beta_{xx}^0(x, y_0) \} dy_0 \\ + \alpha^1(x, y_0) y_1 + \beta_{y_0}^0(x, y_0) y_1^2 + \beta^0(x, y_0) y_2$$

è una funzione d'invarianza nel caso degli estremi fissi. Se, per esempio, $\beta^0 = \beta^0(x)$, dove $\beta^0(a) = \beta^0(b) = 0$, e si assume la funzione $\alpha^1(x, y_0)$ soddisfacente alle condizioni

$$\alpha^1(a, y_0) = \beta_x^0(a), \quad \alpha^1(b, y_0) = \beta_x^0(b), \quad (a, y_0), (b, y_0) \in T_0,$$

allora la (12), con questa scelta di β^0 e α^1 , come subito si vede, è una funzione d'invarianza anche nel caso degli estremi liberi.

Osservazione 2: La funzione (12), in generale, non è del tipo (2). La (12) si può scrivere nella forma

$$(13) \quad f = p^i(x, y_0, y_1) + q^i(x, y_0, y_1) y_1 + r^i(x, y_0, y_1) y_2$$

nei modi seguenti:

$$\left. \begin{aligned} p^1 &= \int \{a_x^1 - \beta_{xx}^0\} dy_0, & q^1 &= \alpha^1 + \beta_{y_0}^0 \cdot y_1, & r^1 \\ p^2 &= \int \{a_x^1 - \beta_{xx}^0\} dy_0 + \alpha^1 \cdot y_1, & q^2 &= \beta_{y_0}^0 \cdot y_1, & r^2 \\ p^3 &= \int \{a_x^1 - \beta_{xx}^0 dy_0 + \beta_{y_0}^0 \cdot y_1^2 \\ p^4 &= \int \{a_x^1 - \beta_{xx}^0\} dy_0 + \alpha^1 \cdot y_1 + \beta_{y_0}^0 \cdot y_1^2, & q^4 &= 0, & r^4 \end{aligned} \right\} = \beta^0.$$

Dalle uguaglianze

$$\begin{aligned} r_x^1 - p_{y_1}^1 &= \beta_x^0, & r_x^2 - p_{y_1}^2 &= \beta_x^0 - \alpha^1, \\ r_{y_0}^3 - q_{y_1}^3 &= \beta_{y_0}^0, & r_{y_0}^4 - q_{y_1}^4 &= \beta_y^0 \end{aligned}$$

segue che si possano scegliere le funzioni β^0, α^i in modo che per ogni $i = 1, 2, 3, 4$ almeno una delle identità

$$(14) \quad p_{y_0}^i = q_x^i, \quad p_{y_1}^i = r_x^i, \quad q_{y_1}^i = r_{y_0}^i \quad \text{in } T_i$$

non sia soddisfatta.

IV. Formuliamo come conseguenza immediata del Teorema il seguente

Corollario: Consideriamo l'integrale curvilineo

$$(15) \quad \int P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

nel dominio T_1 , con gli estremi fissi, calcolato soltanto lungo curve della forma

$$(16) \quad \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = y'(x) \end{cases}$$

dove $y(x)$ è funzione quattro volte differenziabile. Supponendo che le funzioni P, Q, R siano di classe due in T_1 , condizione necessaria e sufficiente affinché l'integrale (15), calcolato sulle curve (16), non dipenda dalla curva, una volta fissati gli estremi, è che le funzioni P, Q, R soddisfino, in T_1 , alle condizioni:

$$(17) \quad \begin{cases} 2(R_y - Q_z) - \frac{\partial}{\partial z}(P_z - R_x) + z \frac{\partial}{\partial z}(R_y - Q_z) = 0, \\ P_y - Q_x + \frac{\partial}{\partial x}(R_x - P_z) + z \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(R_y - Q_z) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y}(R_x - P_z) \right\} + z^2 \frac{\partial}{\partial y}(R_y - Q_z) = 0. \end{cases}$$

Come segue da quanto abbiamo detto, la funzione (12) scrivendola nella forma (13) (preso $y = y_0, z = y_1, p^i = P, q^i = Q, r^i = R$) soddisfa sempre il sistema (17), ma può non soddisfare le condizioni (14).

Infine osserviamo che si può formulare, con facilità, tutti i teoremi analoghi a quelli enunciati in [1], [2] e [3] che si basano sulle funzioni d'invarianza.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. PICONE, *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale unidimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, «Atti dell'Acc. Naz. Lincei, Memorie», vol. VI (1961).
- [2] M. PICONE, *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale bidimensionale del second'ordine nello scalare minimante e conseguenti limitazioni per gli autovalori di un parametro da cui dipende un'equazione euleriana a derivate parziali del quart'ordine*, «Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino», vol. 95 (1960–61).
- [3] M. PICONE, *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, «Atti dell'Acc. Naz. Lincei, Memorie», vol. VI (1962).