Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Un teorema sul flusso di energia nel moto di un fluido di alta conduttività elettrica in cui si genera un campo magnetico

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.5, p. 471–474.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_5_471_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 maggio 1963

Presiede il Socio ELIGIO PERUCCA

NOTE DI SOCI

Magnetofluidodinamica. — *Un teorema sul flusso di energia nel moto di un fluido di alta conduttività elettrica in cui si genera un campo magnetico.* Nota (*) del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

1. Se si considera il moto di un fluido non viscoso, di alta conduttività elettrica, in cui si genera un campo magnetico, sussiste una notevole relazione relativa al flusso di energia totale attraverso una superficie fissa chiusa qualsiasi appartenente al campo del moto del fluido. Se poi gli elementi del campo magnetico e del moto sono periodici rispetto al tempo, si ha l'equivalenza in un periodo del flusso totale di energia attraverso la superficie considerata e del flusso dello *stress* magnetico e di pressione attraverso la stessa superficie.

2. Le equazioni magnetodinamiche per un fluido perfetto di alta conduttività elettrica, tale da poterla ritenere infinita, scritte nella metrologia gaussiana razionalizzata, si riducono, com'è noto, alle seguenti

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{B} \wedge \boldsymbol{v}) = 0 \\
&\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\
&\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\
&\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{B} - \operatorname{grad} p + \rho \operatorname{grad} U \\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho \boldsymbol{v}] = 0 \\
&p = p[\rho]
\end{aligned} \right.
$$

in cui i simboli hanno il solito significato e dove la permeabilità magnetica μ è supposta costante.

(*) Nella seduta del 20 aprile 1963.

Se ora nel campo in cui si muove il fluido consideriamo una superficie chiusa σ qualsiasi, che limita un volume S, moltiplichiamo quindi ambo i membri dell'equazione del moto scalarmente per il vettore velocità $\boldsymbol{v}$ e integriamo sopra tutto il volume S, abbiamo

$$(2) \qquad \int_S \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{v} \cdot dS + \int_S \operatorname{grad} p \times \boldsymbol{v} \cdot dS - \mu \int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} \times \boldsymbol{v} \cdot dS - $$

$$- \int_S \rho \operatorname{grad} U \times \boldsymbol{v} \cdot dS = 0 .$$

Tenendo conto dell'equazione di continuità risulta

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \rho \frac{dv^2}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} (\rho v^2) - \frac{d\rho}{dt} \cdot v^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^2) + \operatorname{div} (\rho v^2 \cdot \boldsymbol{v}) \right]$$

e integrando rispetto al volume S, applicando il teorema della divergenza, si ha

$$(3) \qquad \int_S \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{v} \cdot dS = \frac{d}{dt} \int_S \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot dS + \frac{1}{2} \int_\sigma \rho v^2 \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma ,$$

essendo $\boldsymbol{n}$ il versore della normale esterna alla superficie σ.

Analogamente, essendo la pressione p funzione della densità, se poniamo

$$(4) \qquad P(\rho) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho ,$$

possiamo scrivere

$$\operatorname{grad} p \times \boldsymbol{v} = \rho \operatorname{grad} P(\rho) \times \boldsymbol{v} = \operatorname{div} [P(\rho) \cdot \rho \boldsymbol{v}] - P(\rho) \cdot \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}) =$$

$$= \operatorname{div} [P(\rho) \cdot \rho \boldsymbol{v}] + P(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} ;$$

ma

$$P(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\rho P(\rho)] - \rho \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\rho P(\rho)] - \rho \frac{dP}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\rho P(\rho)] - \frac{\partial p}{\partial t} .$$

Ne segue

$$\operatorname{grad} p \times \boldsymbol{v} = \operatorname{div} [P(\rho) \cdot \rho \boldsymbol{v}] + \frac{\partial}{\partial t} [\rho P(\rho) - p]$$

e

$$(5) \qquad \int_S \operatorname{grad} p \times \boldsymbol{v} \cdot dS = \frac{d}{dt} \int_S [\rho P(\rho) - p] \, dS + \int_\sigma P(\rho) \cdot \rho \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma ,$$

dove $\rho P(\rho) - p$ è l'energia di pressione riferita all'unità di volume.

Nel caso di un fluido in condizioni adiabatiche in cui $p = C\rho^\gamma$, risulta

$$P(\rho) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad , \quad \rho P(\rho) - p = \frac{p}{\gamma - 1} .$$

Si ha inoltre, per la prima delle (1),

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} \times \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \mathbf{H} \times (\mathbf{H} \wedge \boldsymbol{v}) - \mathbf{H} \times \left[\operatorname{rot} (\mathbf{H} \wedge \boldsymbol{v}) + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right] =$$

$$= \operatorname{div} [\mathbf{H} \wedge (\mathbf{H} \wedge \boldsymbol{v})] - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial t},$$

e quindi

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} \times \boldsymbol{v} \cdot d\mathrm{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \frac{1}{2} \mathrm{H}^2 \cdot d\mathrm{S} + \int_\sigma \mathbf{H} \wedge (\mathbf{H} \wedge \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma. \tag{6}$$

Infine, se il potenziale U delle forze di massa non elettromagnetiche non dipende esplicitamente dal tempo, si ha

$$\rho \operatorname{grad} \mathrm{U} \times \boldsymbol{v} = \operatorname{div} (\mathrm{U} \cdot \rho \boldsymbol{v}) - \mathrm{U} \cdot \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}) = \operatorname{div} (\mathrm{U} \cdot \rho \boldsymbol{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathrm{U})$$

e

$$\int_S \rho \operatorname{grad} \mathrm{U} \times \boldsymbol{v} \cdot d\mathrm{S} = \frac{d}{dt} \int_S \rho \mathrm{U} \cdot d\mathrm{S} + \int_\sigma \rho \mathrm{U} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma. \tag{7}$$

Sostituendo (3), (5), (6) e (7) nella (2) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_S \left\{ \frac{1}{2} \rho v^2 + [\rho \mathrm{P}(\rho) - p] + \frac{1}{2} \mu \mathrm{H}^2 - \rho \mathrm{U} \right\} d\mathrm{S} +$$

$$+ \int_\sigma \left\{ \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} + \mathrm{P}(\rho) \cdot \rho \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} - \mu \mathbf{H} \wedge (\mathbf{H} \wedge \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{n} - \rho \mathrm{U} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \right\} d\sigma = 0$$

che si può scrivere

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_S \left\{ \frac{1}{2} \rho v^2 + [\rho \mathrm{P}(\rho) - p] + \frac{1}{2} \mu \mathrm{H}^2 - \rho \mathrm{U} \right\} d\mathrm{S} + \\ &+ \int_\sigma \left\{ \frac{1}{2} \rho v^2 + [\rho \mathrm{P}(\rho) - p] + \frac{1}{2} \mu \mathrm{H}^2 - \rho \mathrm{U} \right\} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma + \\ &+ \int_\sigma \left\{ p + \frac{1}{2} \mu \mathrm{H}^2 - \mu \mathcal{H}(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \right\} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

dove $\mathcal{H}(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ è una *diade* tale che $\mathcal{H}(\mathbf{H}, \mathbf{H})\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = \mathbf{H} \times \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{H} \times \boldsymbol{n}$.

Osserviamo che la quantità

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho v^2 + [\rho \mathrm{P}(\rho) - p] + \frac{1}{2} \mu \mathrm{H}^2 - \rho \mathrm{U} \tag{9}$$

rappresenta l'energia totale riferita all'unità di volume [1], e che l'espressione

$$\Phi = -\left\{ p + \frac{1}{2} \mu \mathrm{H}^2 - \mu \mathcal{H}(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \right\} \tag{10}$$

(1) Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sulla stabilità dei moti magnetofluidodinamici stazionari*, « Rendiconti Accad. Naz. dei Lincei », serie VIII, vol. XXIX, fasc. 6 e vol. XXX, fasc. 1.

è lo *stress* dovuto agli sforzi magnetici e di pressione idrodinamica. Invero questi sforzi derivano dai termini dell'equazione del moto $\mu \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} - \operatorname{grad} p$, che rappresentano l'azione combinata della forza di Lorentz e del gradiente di pressione. Ora risulta

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{H}}{dP} \mathbf{H} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} H^2$$

dove $\frac{d\mathbf{H}}{dP} \mathbf{H}$ è uguale al gradiente della diade $\mathcal{H}(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ [2]; perciò

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = \operatorname{grad} \left\{ \mathcal{H}(\mathbf{H}, \mathbf{H}) - \frac{1}{2} H^2 \right\}$$

e quindi

$$\mu \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} - \operatorname{grad} p = - \operatorname{grad} \left\{ p + \frac{1}{2} \mu H^2 - \mu \mathcal{H}(\mathbf{H}, \mathbf{H}) \right\} = \operatorname{grad} \Phi . \tag{11}$$

L'equazione (8) si può scrivere allora in forma più semplice

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{E} \, dS + \int_\sigma \mathcal{E} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma = \int_\sigma \Phi \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot d\sigma \tag{12}$$

che è una notevole relazione relativa al flusso di energia totale attraverso una superficie chiusa qualsiasi.

Ora è noto che il sistema di equazioni (1) ammette delle soluzioni in cui gli elementi del moto e del campo magnetico sono funzioni periodiche rispetto al tempo. Se perciò consideriamo una soluzione periodica di periodo T e integriamo ambo i membri della (12) rispetto a un periodo, poiché risulta $\left[\int_S \mathcal{E} \, dS \right]_0^T = 0$, si deduce

$$\int_0^T dt \int_\sigma \mathcal{E} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \, d\sigma = \int_0^T dt \int_\sigma \Phi \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \, d\sigma \tag{13}$$

la quale esprime il seguente teorema di media:

In un moto periodico di un fluido compressibile, non viscoso, di alta conduttività elettrica, il flusso di energia totale in un periodo attraverso una superficie chiusa qualsiasi fissa, immersa nel campo del moto, e uguale al flusso dello stress magnetico e di pressione attraverso la stessa superficie e nello stesso periodo.

(2) Infatti, con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali, si ha

$$\frac{d\mathbf{H}}{dP} \mathbf{H} = \sum_{i=1}^{3} H_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (H_i \mathbf{H}) = \operatorname{grad} \mathcal{H}(\mathbf{H}, \mathbf{H}).$$