Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

N. G. Ionescu-Pallas

Sul concetto di Massa nella teoria della relatività

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.4, p. 403–406.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_4_403_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Meccanica. — *Sul concetto di Massa nella teoria della relatività.* Nota di NICOLAS JEAN IONESCU-PALLAS, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

Nella teoria della relatività si sono conservati tre concetti distinti sulla massa di moto di un corpo materiale:

la massa definita dalla conservazione della quantità di moto o la massa inerte del corpo;

la massa « longitudinale » e « trasversale », nozioni convenzionali accettate per conservare il legame tradizionale tra i concetti della meccanica classica: massa, accelerazione, forza. La definizione delle nozioni « massa longitudinale » e « massa trasversale », così come risulta dallo studio di movimento degli elettroni è purtroppo assai singolare per poter essere accettata dalla meccanica razionale senza un processo preliminare di generalizzazione, valido per qualsiasi interazione concreta (scalare, vettoriale, tensoriale). Vedremo che, senza questa generalizzazione, potremmo arricchire la meccanica di alcune nozioni di massa applicabili nel caso delle interazioni non vettoriali.

Ammettiamo – quale punto di partenza – che l'equazione dinamica di Newton

$$\mu \ddot{x}_\nu = F_\nu \tag{1}$$

sia vera nello spazio Minkowski. Quindi F_ν rappresenta un vettore 4-dimensionale, μ un 4-scalare, mentre le derivazioni sono prese rispetto al tempo proprio. Possiamo utilizzare oltre la proprietà di ortogonalità dei 4-vettori accelerazione e velocità per eliminare dal (1) le componenti temporali e rivenire alla consueta notazione vettoriale

$$\mu \vec{a} = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)\left[\vec{F} - \frac{1}{c^2}\,\vec{v}\,(\vec{v}\,\vec{F})\right]. \tag{2}$$

Qui $\vec{F}$ rappresenta la componente spaziale della forza di Minkowski F_ν. L'equazione (2) non contiene quantità definite in modo classico in ambedue i membri. Per eliminare questa insufficienza, bisogna che il vettore $\vec{F}$ sia espresso dal vettore forza di Newton

$$\vec{F}_N = \frac{d}{dt}(m\,\vec{v}), \tag{3}$$

dove con m si intende la massa inerte del corpo (dipendente dalla velocità, secondo la formula di Lorentz). Moltiplicheremo a tal uopo ambo i membri

(*) Nella seduta del 20 aprile 1963.

dell'equazione (1) per $\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{1/2}$ e riterremo poi la componente spaziale. Risulta $\vec{F}_N=\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{1/2}\vec{F}$ e l'equazione (2) ottiene la forma classica

$$\mu\,\vec{a}=\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{1/2}\left[\vec{F}_N-\frac{1}{c^2}\,\vec{v}\,(\vec{v}\,\vec{F}_N)\right], \tag{4}$$

L'equazione (4), benché abbia una forma classica e sia stata dedotta in modo universalmente valido, non ha però un valore maggiore che quello di una semplice definizione, finché non ammetteremo un'altra espressione per il 4–vettore F_ν dedotta da una o più funzioni chiamate «potenziali».

La meccanica relativista – a differenza della meccanica classica – non può realizzare tale operazione in modo unico. Per costruire le equazioni di campo, la generalizzazione relativista dello scalare 3–dimensionale implica la specificazione del tipo concreto di interazione. Questo però non è sufficiente; per dedurre l'espressione della forza dal potenziale, è necessario adottare alcune norme convenzionali atte a limitare il gran numero di possibilità:

le equazioni dinamiche devono essere lineari nel potenziale:

devono contenere soltanto derivazioni dell'ordine I rispetto alle coordinate;

i 4–vettori forza e velocità devono essere ortogonali;

le equazioni devono essere tutt'al più quadratiche nelle componenti della 4–velocità.

Con queste limitazioni possiamo scrivere

$$F_\nu=-\left\{\begin{array}{l} +\dfrac{1}{c^2}\,\dot{x}_\mu\left(\dot{x}_\nu\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_\mu}-\dot{x}_\mu\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}\right)\\ \dfrac{1}{c}\,\dot{x}_\mu\left(\dfrac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_\mu}-\dfrac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\nu}\right)\\ -\dfrac{1}{c^2}\,\dot{x}_\mu\left(\dot{x}_\sigma\dfrac{\partial\Phi_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu}-\dot{x}_\sigma\dfrac{\partial\Phi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}\right)\end{array}\right. \tag{5}$$

secondo quanto occorra nelle interazioni scalari, vettoriali o tensoriali. La ultima delle condizioni, introdotta esplicitamente da George Birkhoff, per quanto sembrasse arbitraria è del tutto indispensabile, dato che essa elimina una serie di combinazioni, come ad esempio

$$F_\nu^*=-\left\{\begin{array}{l} \quad * \quad * \quad * \\ -\dfrac{1}{c^3}\,\dot{x}_\mu\left(\dot{x}_\nu\,\dot{x}_\sigma\dfrac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_\mu}-\dot{x}_\sigma\,\dot{x}_\sigma\dfrac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\nu}\right)\\ +\dfrac{1}{c^4}\,\dot{x}_\mu\left(\dot{x}_\nu\,\dot{x}_\sigma\,\dot{x}_\zeta\dfrac{\partial\Phi_{\mu\sigma}}{\partial x_\zeta}-\dot{x}_\sigma\,\dot{x}_\zeta\,\dot{x}_\zeta\dfrac{\partial\Phi_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\right)\end{array}\right. . \tag{6}$$

Per mettere in rilievo la possibilità della definizione di massa secondo l'equazione (4), esamineremo il caso di moto di una particola nel campo generato da un'altra particola con massa di riposo molto più grande della prima. In tale caso $\Phi_\nu \rightarrow i\delta_{\nu 4}\,\Phi$; $\Phi_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{\mu\nu}\,\Phi_{\mu\mu}$, $\Phi_{\mu\mu} \rightarrow (\Phi\,,\,\Phi\,,\,\Phi - \Phi)$; $\frac{\partial\Phi}{\partial t} \rightarrow 0$ e l'equazione (4) diventa

$$\text{(7)} \qquad \mu\,\vec{a} = -\left\{\begin{array}{l} \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)\nabla\Phi \\ \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{1/2}\left[\nabla\Phi - \frac{1}{c^2}\,\vec{v}\,(\vec{v}\,\nabla\Phi)\right] \\ \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)\nabla\Phi - 2\,\frac{1}{c^2}\,\vec{v}\,(\vec{v}\,\nabla\Phi)\,. \end{array}\right.$$

Dall'equazione (7) si constata che se vogliamo conservare la legge dinamica di movimento di un corpo materiale in un campo conservativo sotto la forma $m\,\vec{a} = -\nabla\Phi$, quindi i concetti classici «massa longitudinale» e «massa trasversale» sono applicabili soltanto al movimento in un campo di interazione vettoriale. Per il movimento in un campo scalare, si può definire una grandezza indipendente dall'angolo tra il vettore velocità e il gradiente del campo, secondo la formula

$$\text{(8)} \qquad m = \frac{\mu}{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}\,,$$

mentre nel caso delle interazioni tensoriali, troveremo

$$\text{(9)} \qquad m_l = \frac{\mu}{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \quad , \quad m_t = \frac{\mu}{1 + \frac{\vec{v}^2}{c^2}}\,;$$

risultato maggiormente strano, dato che la «massa trasversale» diminuisce con la velocità.

Se non vogliamo ora introdurre tali complicazioni, possiamo dare alle nozioni di «massa longitudinale» e «trasversale» un significato universale, secondo l'equazione (4). Capiremo che le proprietà direzionali della massa non sono in rapporto con il campo gradiente, ma con il campo dei vettori forza di Newton. I vettori $-\nabla\Phi$ e $\vec{F}_N$ non hanno sempre obbligatoriamente la stessa direzione.

Non abbiamo ancora affermato niente sullo scalare μ. La più semplice ipotesi che si possa fare in merito, è quella di identificare con la massa di riposo del corpo ($\mu = m_0$). Questa identificazione non è priva di difficoltà, dato che nel caso dell'interazione scalare (variante Nordström) e tensoriale simmetrica (teoria di Birkhoff) si ottiene un'«accelerazione secolare» del centro di massa. Si elimina la difficoltà nella variante Bergmann del campo scalare con la relazione $\mu = m_0\left(1 + \frac{\Phi}{m_0 c^2}\right)$, concordante alla richiesta di linearità delle equazioni dinamiche rispetto al potenziale.

Un'ultima questione che vogliamo sottolineare è quella che l'equazione (7) ha quale conseguenza l'esistenza di una relazione tra l'energia cinetica e potenziale di un corpo che non è in tutti i casi lineare. Notando con T l'energia cinetica globale (incluso $m_0 c^2$) questa relazione è (il caso $\mu = m_0$)

$$
\mathrm{E} = \begin{cases} \mathrm{T} \exp\left(\dfrac{\mathrm{U}}{m_0 c^2}\right) \\ \mathrm{T} + \mathrm{U} \\ \mathrm{T} \exp\left(\dfrac{\mathrm{U}}{m_0 c^2}\right). \end{cases} \tag{9}
$$

Sotto aspetto dinamico, questa diversità di situazioni si traduce con il fatto che la relazione $\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = -\operatorname{grad} \mathrm{U}$, raccomandata di solito quale equazione fondamentale della dinamica relativistica, deve sostituirsi a sua volta dalle equazioni

$$
\frac{d}{dt}(m \vec{v}) = -\begin{cases} \dfrac{1 - \dfrac{\vec{v}^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\vec{v}^2}{c^2}}} \operatorname{grad} \mathrm{U} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\vec{v}\,(\vec{v} \operatorname{grad} \mathrm{U})}{\sqrt{1 - \dfrac{\vec{v}^2}{c^2}}} \\ \operatorname{grad} \mathrm{U} \\ \dfrac{1 + \dfrac{\vec{v}^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\vec{v}^2}{c^2}}} \operatorname{grad} \mathrm{U} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\vec{v}\,(\vec{v} \operatorname{grad} \mathrm{U})}{\sqrt{1 - \dfrac{\vec{v}^2}{c^2}}}. \end{cases} \tag{10}
$$

Questa analisi ci aiuta a capire il fatto che taluni problemi di meccanica relativista, come sarebbero ad esempio « il movimento di un oscillatore » o « il movimento uniforme accelerato », sono per lo meno insufficientemente formulati. Secondo il nostro parere, si dovrebbe aggiungere « nel caso di tale interazione ».

BIBLIOGRAFIA.

G. I. WHITROW and G. E. MORDUCH, *General Relativity and Lorentz-Invariant Theories of Gravitation*, « Nature (G. B.) », vol. 188, 790–4 (Dec. 3, 1960).

H. ARZELIÈS, *La Dynamique Relativiste*, Paris, Gauthier Villars, 1957.

B. FINZI, *Meccanica Razionale*, Bologna, N. Zanichelli, 1960.