
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ALDO M. PRATELLI

Sui fronti d'onda nei gas viscosi e conduttori del calore

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.4, p. 390–395.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_4_390_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sui fronti d'onda nei gas viscosi e conduttori del calore.* Nota (*) di ALDO M. PRATELLI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

In un gas ideale, cioè non conduttore del calore e non viscoso, i fronti d'onda si propagano con la celerità (riferita al fluido stesso) del suono. Poiché le equazioni differenziali indefinite sono del primo ordine, attraverso la superficie che costituisce il fronte d'onda sono continue la pressione, la densità materiale, le componenti della velocità, ecc., mentre sono possibili discontinuità longitudinali nelle derivate delle suddette grandezze; oltre ai fronti che si propagano, ve ne possono essere altri che invece rimangono fissi rispetto al fluido.

Duhem (1) mostrò che i fronti d'onda sussistono anche se la conducibilità termica è diversa da zero: in tal caso però la celerità è minore che nel caso ideale (e precisamente la celerità «laplaciana» è sostituita dalla celerità «newtoniana»). Lo stesso Autore precisò che un fluido viscoso ammette solo fronti d'onda fissi (sempre rispetto al fluido): egli suppose che i due coefficienti di viscosità λ e η non fossero legati dalla relazione di Stokes ($\lambda + 2\eta/3 = 0$), la quale sussiste allorché la variabile termodinamica che rappresenta la pressione («pressione termodinamica») viene identificata al valor medio degli sforzi («pressione media»). Tuttavia anche quando non vale la relazione di Stokes i due coefficienti di viscosità debbono obbedire a disequazioni (si vedano più avanti la (7) e la (7') note come «disequazioni del Duhem») imposte dal secondo principio della termodinamica.

Il risultato del Duhem è stato ripreso nel 1931 da G. Lampariello [5]: questi, seguendo il procedimento delle varietà caratteristiche [7], ha dimostrato che attraverso un fluido comprimibile viscoso non si possono propagare fronti d'onda con celerità finita. Le equazioni utilizzate nella suddetta Nota [5] presuppongono due ipotesi: che i due coefficienti di viscosità obbediscano alla relazione di Stokes, e che il fluido sia barotropico, cioè che densità e pressione siano legate da una equazione complementare, finita (2).

Scopo della presente Nota è mostrare che, qualunque sia l'equazione di stato del gas, se si prescinde dalla relazione di Stokes e si distingue quindi tra pressione media e pressione termodinamica, è possibile la propagazione di fronti d'onda qualsivoglia, con celerità qualsiasi, purché i due coefficienti

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 20 aprile 1963.

(1) In numerose Note pubblicate nei «Comptes Rendus», e poi nei volumi [1, 2].

(2) Queste ipotesi sono ordinariamente accettate, e suffragate da dati sperimentali, nell'Aerodinamica, in cui per *pressione* si intende sia la pressione *termodinamica* sia la pressione *media*; cfr. ad esempio [3].

di viscosità siano legati dalla relazione $\lambda = -2\eta$, oppure a condizione che sia $\eta = 0$ e $\lambda \neq 0$.

Il primo caso (per $\eta \neq 0$ e quindi $\lambda \neq 0$) deve essere scartato per ragioni fisiche, essendo in contraddizione con le citate disequazioni del Duhem.

Il secondo caso è invece concretamente possibile; in Aerotermochimica linearizzata si incontrano modelli di gas in cui è nullo η mentre è positiva la viscosità di volume $\omega = \lambda + 2\eta/3$ (e quindi $\lambda > 0$) ⁽³⁾. In questo caso le discontinuità, nelle derivate seconde delle componenti della velocità, hanno carattere trasversale (cioè sono tangenti al fronte d'onda) e il fatto che la conducibilità termica sia nulla o diversa da zero non pone limitazioni alla celerità di tali fronti d'onda.

Il caso in esame ($\eta = 0$, $\lambda > 0$) costituisce dunque un caso eccezionale, sfuggito alla trattazione del Duhem ⁽⁴⁾. Ritengo non privo di interesse metterlo in evidenza, anche perché in esso i fronti d'onda possono essere qualsiasi e propagarsi con celerità qualsiasi, a condizione che le discontinuità nelle derivate seconde abbiano carattere trasversale: carattere quindi diverso da quello, che si riscontra nei fluidi non viscosi ($\lambda = \eta = 0$) nei quali notoriamente le discontinuità debbono essere perpendicolari ai fronti d'onda, e questi debbono propagarsi con celerità ben definita: la celerità del suono.

1. Il moto del fluido è riferito a un sistema di coordinate x^i ($i = 1, 2, 3$); assumiamo come incognite le tre componenti $v^k(x, t)$ della velocità, oltre a due variabili termodinamiche: la densità materiale $\rho = \rho(x, t)$, avente per reciproco il volume specifico $V = 1/\rho$, e l'entropia specifica $S = S(x, t)$.

Altre variabili termodinamiche sono: l'energia interna specifica w , la temperatura assoluta T e la pressione termodinamica p .

L'energia interna specifica sarà definita da un'assegnata funzione regolare

$$(1) \quad w = w(V, S)$$

mentre la T e la p sono date da

$$(2) \quad T = T(V, S) = \frac{\partial w(V, S)}{\partial S}$$

$$(3) \quad p = p(V, S) = -\frac{\partial w(V, S)}{\partial V}$$

in armonia con la legge termodinamica

$$(4) \quad T dS = dw + p dV.$$

(3) Si veda in proposito MEIXNER [9], P. E. DOAK in [12] e NAPOLITANO [10, 11].

Poiché $\eta \geq 0$, la relazione di Stokes $\lambda = -2\eta/3$ porta come conseguenza $\lambda \leq 0$. Ma la relazione di Stokes può esser soddisfatta approssimativamente, cosicché può aversi $\omega > 0$ sia con $\eta > 0$ e $\lambda < 0$, sia con η e λ entrambi positivi, purché piccoli. In tal modo per i gas ordinari il principio di continuità non è violato. Esistono inoltre esempi (di fluidi poco comprimibili) in cui $\lambda > 100\eta > 0$ (cfr. ROSENHEAD in [12]).

(4) Questo caso eccezionale non rientra nella trattazione di LAMPARIELLO [5], perché ivi $\lambda = -2\eta/3$ e quindi se $\eta = 0$ anche $\lambda = 0$.

Nel corso della presente Nota, peraltro, non interessa conoscere la w data dalla (1), ma solo $T = T(V, S)$ e $p = p(V, S)$ le quali dovranno essere legate dalla relazione

$$\frac{\partial T}{\partial V} = - \frac{\partial p}{\partial S}$$

conseguenza di (2) e (3).

Si considerano noti, funzioni empiriche dello stato termodinamico del fluido, il coefficiente di conducibilità termica k , il primo coefficiente di viscosità dinamica η , o coefficiente di viscosità di slittamento, e il *secondo* coefficiente di viscosità dinamica λ ; con questi si forma il coefficiente di viscosità di volume $\omega = \lambda + 2\eta/3$ ⁽⁵⁾.

Il tensore degli sforzi è dato da ⁽⁶⁾

$$p_{ik} = (p - \lambda v_i^i) a_{ik} - \eta (v_{i|k} + v_{k|i})$$

e indicato con $\bar{p}$ il valor medio degli sforzi (cioè $\bar{p} = p_{ik} a^{ik}/3$) risulta ⁽⁷⁾:

$$p - \bar{p} = \omega v_i^i$$

Il sistema di equazioni indefinite, che regge la dinamica dei fluidi comprimibili viscosi, è:

$$(6a) \quad \rho \frac{dv_k}{dt} + p_{|k} = \rho F_k + (\lambda v_i^i)_{|k} + [\eta (v_{i|k} + v_{k|i})]_{|i}$$

$$(6b) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho v_i^i = 0$$

$$(6c) \quad \rho T \frac{dS}{dt} = \lambda (v_i^i)^2 + \eta v_{i|k} (v^{i|k} + v^{k|i}) + (k T_{|i})^i.$$

La (6a) è l'equazione della quantità di moto (di Navier-Stokes); in essa F_k indica la forza esterna specifica. La (6b) è l'equazione di conservazione della massa. La (6c) è l'equazione dell'entropia ⁽⁸⁾; per il secondo principio della termodinamica debbono esser soddisfatte le disequazioni

$$(7) \quad \eta \geq 0; \quad (7') \quad \lambda + 2\eta/3 \geq 0; \quad (7'') \quad k \geq 0.$$

(5) η è la *shear viscosity*, ω la *bulk viscosity*; cfr. la discussione [12].

(6) La lineetta inclinata indica derivata tensoriale nello spazio euclideo tridimensionale; il punto indica derivata parziale rispetto al tempo, mentre la derivata totale di una funzione $f(x, t)$ rispetto al tempo, calcolata seguendo la particella, è

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} + f_{|k} v^k.$$

Vale la convenzione della somma; a_{ik} rappresenta il tensore fondamentale. Per le definizioni che non vengono date esplicitamente cfr. [4].

(7) La relazione di Stokes $\omega = 0$ corrisponde a $p = \bar{p}$. Onde permettere alla (4) di rimaner valida anche durante il moto, occorre invece distinguere tra p e $\bar{p}$. Si veda [8], [12], [13], [14].

(8) I primi due addendi della (6c) si deducono con semplici passaggi dalla equazione (13) di LIGHTILL [8] o dalla (49.5) di LANDAU-LIFSHITZ [6].

Il sistema, tenendo presenti la (2) e la (3), è costituito da cinque equazioni nelle cinque incognite ρ , S , v_k ed è normale nella t .

2. Se non sono nulli i coefficienti λ e η , le equazioni differenziali (6 a) sono del secondo ordine nelle v_k ; se non è nullo il coefficiente k , l'equazione (6 c) è del secondo ordine in ρ ed S . Indicata con $\tau(x, t) = \tau_0$ (τ_0 costante) la equazione di una varietà caratteristica, i fronti d'onda sono le superfici mobili dello spazio tridimensionale attraverso le quali sono continue le funzioni incognite e le loro derivate prime, mentre può presentare discontinuità almeno una delle derivate seconde delle funzioni incognite.

Mettendo in evidenza i termini con le derivate seconde, possiamo scrivere

$$(8 a) \quad (\lambda + \eta) v_{i|k}^{i|} + \eta v_{k|i}^{i|} + \dots = 0$$

$$(8 b) \quad \frac{d^2 \rho}{dt^2} + \rho \frac{dv_i^{i|}}{dt} + \dots = 0$$

$$(8 c) \quad \frac{\partial T}{\partial \rho} \rho_{|i}^{i|} + \frac{\partial T}{\partial S} S_{|i}^{i|} + \dots = 0$$

La (8 a) e la (8 c) sono la semplice trascrizione della (6 a) e della (6 c), in cui si son messe in evidenza le derivate seconde delle funzioni incognite; la (8 c) è stata inoltre divisa per $k \neq 0$; la (8 b) è dedotta dalla (6 b) mediante derivazione totale rispetto al tempo ⁽⁹⁾.

Se indichiamo i salti delle derivate seconde delle funzioni incognite attraverso le varietà caratteristiche premettendo la lettera Δ ai simboli delle derivate seconde stesse, e se introduciamo i moltiplicatori α_j , δ , ε , le condizioni cinematiche relative alle discontinuità sono:

$$\Delta v_{j|i}^{i|} = \alpha_j \tau_{|i}^{i|} \tau_{|k} \quad ; \quad \Delta \rho_{|i}^{i|} = \delta \tau_{|i} \tau_{|k}^{i|} \quad ; \quad \Delta S_{|i}^{i|} = \varepsilon \tau_{|i} \tau_{|k}^{i|}$$

$$\Delta \frac{dv_j^{i|}}{dt} = \alpha_j \tau_{|i}^{i|} \frac{d\tau}{dt} \quad ; \quad \Delta \frac{d^2 \rho}{dt^2} = \delta \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 \quad ; \quad \Delta \frac{d^2 S}{dt^2} = \varepsilon \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2$$

Le condizioni dinamiche relative alle discontinuità delle derivate seconde permettono di scrivere il seguente sistema di cinque equazioni lineari omogenee nei cinque moltiplicatori α_i , δ , ε :

$$(9 a) \quad (\lambda + \eta) \alpha_i \tau_{|i}^{i|} \tau_{|k} + \eta \alpha_k \tau_{|i} \tau_{|i}^{i|} = 0$$

$$(9 b) \quad \left\{ \delta \frac{d\tau}{dt} + \rho \alpha_i \tau_{|i}^{i|} \right\} \frac{d\tau}{dt} = 0$$

$$(9 c) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \delta + \frac{\partial T}{\partial S} \varepsilon \right) \tau_{|i} \tau_{|i}^{i|} = 0$$

(9) Se invece si fossero calcolate le derivate parziali della (6 b) rispetto alle coordinate, avremmo ottenuto equazioni differenziali diverse, ma al momento di scrivere le condizioni dinamiche avremmo ritrovato sostanzialmente la (9 b).

Componendo la (9 a) con $\tau^{/k}$ (ove $\tau^{/k} \neq 0$) si ha

$$(\lambda + 2\eta) \alpha_i \tau^{/i} \tau_{/k} \tau^{/k} = 0.$$

Poiché $\tau_{/k} \tau^{/k} \neq 0$, deve esser soddisfatta l'equazione

$$(10 a) \quad (\lambda + 2\eta) \alpha_i \tau^{/i} = 0.$$

Ciò avviene in due casi:

$$(11) \quad \lambda + 2\eta = 0 \quad (\text{e } \alpha_i \text{ qualsiasi})$$

$$(11') \quad \alpha_i \tau^{/i} = 0.$$

Il caso (11) è da escludere per ragioni fisiche, in quanto incompatibile con le disequazioni (7) e (7'). Sostituendo la (11') nella (9 a), questa si riduce alla

$$(12) \quad \eta \alpha_k \tau_{/i} \tau^{/i} = 0$$

e quindi si ottengono valori non nulli di α_k se è soddisfatta la (11') e se $\eta = 0$, qualunque sia λ ; la (7') mostra che in tal caso deve però essere $\lambda \geq 0$ ⁽¹⁰⁾.

Per la (11') (sempre tenendo conto che $\tau_{/k} \tau^{/k} \neq 0$) la (9 b) e la (9 c) diventano

$$(10 b) \quad \delta \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 0$$

$$(10 c) \quad \delta \frac{\partial T}{\partial \rho} + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial S} = 0.$$

Se $d\tau/dt \neq 0$, dalla (10 b) $\delta = 0$, e sostituendo nella (10 c) si trova che anche $\varepsilon = 0$ (quindi non ammettono discontinuità le derivate seconde di ρ ed S).

Se invece $d\tau/dt = 0$ (fronte fisso), allora δ può essere qualsiasi; si hanno infiniti valori per δ ed ε , se $k \neq 0$, legati dalla (10 c).

Supponiamo ora $k = 0$, cioè che il gas non sia conduttore del calore. La (6 c) diventa una equazione del primo ordine nelle v_k e in S , che potrà venir derivata totalmente rispetto a t oppure parzialmente rispetto a una coordinata. La (9 a) e la (9 b) non vengono modificate, la (9 c) è sostituita da $\varepsilon d\tau/dt = 0$. Quindi possono esistere fronti d'onda che si propagano con celerità qualsiasi, purchè attraverso ad essi le discontinuità delle derivate seconde della velocità abbiano carattere trasversale. Le derivate seconde di ρ ed S , invece, non presentano discontinuità.

Sempre nel caso $k = 0$, può esistere un fronte fisso, sul quale le derivate seconde di ρ ed S (oltre a quelle della velocità) possono presentare disconti-

(10) Nel caso $\eta = 0$, il segno di λ si può dedurre direttamente dalla (6 c). Il primo membro di tale equazione deve essere positivo o nullo per il secondo principio della termodinamica: lo stesso segno debbono allora avere il primo e il terzo addendo del secondo membro (il secondo addendo è nullo nell'ipotesi $\eta = 0$). Poiché nei fluidi comprimibili $v^{/i}_i \neq 0$, da $\lambda (v^{/i}_i)^2 \geq 0$ segue $\lambda \geq 0$.

nuità, tra loro indipendenti. Tuttavia non sembra valga la pena di approfondire le proprietà del fronte fisso, perché tali proprietà sono state già trovate dal Duhem [1] (con qualche diversità da come è esposto qui, in quanto l'entropia specifica S non appare nel sistema di equazioni studiato da tale autore).

Concludo sottolineando che, sia il gas conduttore o no del calore, *se il primo coefficiente di viscosità η è diverso da zero (quando il secondo coefficiente λ sia o no nullo) è impossibile la propagazione di fronti d'onda con celerità finita e non nulla; se invece il primo coefficiente di viscosità η è nullo e il secondo coefficiente λ è positivo, può esistere un qualsivoglia fronte d'onda che si propaga con celerità qualsiasi, attraverso al quale saltano trasversalmente le derivate seconde della velocità (mentre le derivate seconde di ρ ed S saltano solo su eventuali fronti fissi).*

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE.

- [1] P. DUHEM, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2 vol., Paris 1903-1904.
- [2] P. DUHEM, *Recherches sur l'Élasticité*, Paris 1906.
- [3] B. FINZI, *Lezioni di Aerodinamica*, Milano 1960.
- [4] B. FINZI, M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, 2^a ed., Bologna 1961.
- [5] G. LAMPARIELLO, *Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi*, « Rend. Lincei » (6), pp. 688-691 (1931).
- [6] L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ, *Fluid Mechanics* (trans. by J. B. Sykes, W. H. Reid) London 1959.
- [7] T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Bologna 1931.
- [8] M. I. LIGHTILL, *Viscosity effects in sound waves of finite amplitude*, in *Surveys in Mechanics*, Cambridge 1956, pp. 250-351.
- [9] J. MEIXNER, *Strömungen von fluiden Medien mit inneren Umwandlungen und Druckviscosität*, « Zeit. Phys. », 131, pp. 456-469 (1952).
- [10] L. G. NAPOLITANO, *On the equivalence between chemical reactions and volume viscosity effects in linearized non-equilibrium flows*, « Journ. Aero/space Scien. » (in corso di stampa).
- [11] L. G. NAPOLITANO, *Nuovi aspetti della Aerothermochimica linearizzata*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano » (in corso di stampa).
- [12] L. ROSENHEAD (Leader) and others, *A discussion on the first and the second viscosities of fluids*, « Proc. R. Soc. », A 226, pp. 1-69 (1954).
- [13] J. SERRIN, *Mathematical principles of classical Fluid Mechanics*, « Handbuch der Physik », 8/1, pp. 125-263 (1959).
- [14] C. TRUESDELL, *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, « Journ. Rat. Mech. Anal. », 1, pp. 124-301 (1952); 2, pp. 593-616 (1953).