
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIORGIO FERRARESE

Sul moto di una particella rispetto ad un riferimento fluido: analogie tra meccanica classica e relatività generale. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.4, p.
385–389.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_4_385_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sul moto di una particella rispetto ad un riferimento fluido: analogie tra meccanica classica e relatività generale* (*).
Nota I di GIORGIO FERRARESE, presentata (**) dal Socio G. KRALL.

Il lavoro consta essenzialmente di due parti. Nella prima, che costituisce l'argomento della Nota I, si scrive, in relatività generale, la forma controvariante delle equazioni *relative* di moto per una particella liberamente gravitante. L'espressione che in tale formulazione compete al campo gravitazionale (relativo) fa intervenire tutti i caratteri intrinseci del fluido di riferimento.

Nella seconda parte, Nota II, si fa vedere come anche in meccanica classica, assumendo un generico riferimento fluido in luogo del più abituale riferimento solido, le equazioni relative di moto di una particella assumono forme perfettamente analoghe a quelle della relatività generale.

I. — PREMESSE E RICHIAMI.

Sia V_4 la varietà spazio tempo, $(x^i)^{(1)}$ un sistema qualunque di coordinate locali *fisicamente ammissibili* (linee $x^4 = \text{var.}$ del genere tempo, varietà $x^4 = \text{cost.}$ del genere spazio), $ds^2 \equiv g_{ik}(x) dx^i dx^k$ la metrica d'universo, di segnatura $+++ -$. Le (x^α) sono le coordinate spaziali e $x^4 = ct$ la coordinata temporale.

Il sistema coordinato (x^i) individua un ben determinato *riferimento fisico* S caratterizzato dal campo di vettori unitari $\gamma(x)$ ($\gamma_i \gamma^i = -1$) tangenti alle linee x^4 e orientati nel futuro:

$$(1) \quad \gamma^\alpha = 0 \quad , \quad \gamma^4 = 1/\sqrt{-g_{44}} \quad ; \quad \gamma_i = g_{i4}/\sqrt{-g_{44}}.$$

Decomposto T , spazio tangente a V_4 nel suo generico punto, nella somma diretta di uno spazio unidimensionale, Θ parallelo a γ e dello spazio supplementare Σ , a tre dimensioni, ad esso ortogonale (tempo e spazio localmente associati), una tecnica di proiezione di vettori e tensori su Θ e su Σ , introdotta da alcuni anni in relatività generale (cfr. [2], [3], [4], [5] ed anche [7]) consente di definire grandezze fisiche ed operazioni differenziali relative al riferimento fisico S , con carattere invariante rispetto al gruppo delle trasformazioni *interne* ad S :

$$(2) \quad x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, x^3) \quad , \quad x^{4'} = x^{4'}(x^1, x^2, x^3, x^4).$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 20 aprile 1963.

(1) Si conviene che gli indici latini varino da 1 a 4, gli indici greci da 1 a 3.

Tale tecnica ha permesso di giungere ad una sistematica e corretta formulazione relativa delle leggi fisiche in relatività generale; facendo ritrovare, circostanza significativa, concetti e relazioni della meccanica classica, sia pure in forme rinnovate.

Ad esempio l'equazione di moto assoluta di una particella liberamente gravitante

$$(3) \quad DP_i = 0$$

(D simbolo di differenziazione assoluta, $P^i = m_0 \frac{dx^i}{d\tau}$ quadriquantità di moto), scritta in forma relativa al riferimento S, assume un aspetto *tipicamente newtoniano* (cfr. [2]).

Senza entrare in lunghi richiami, ci limitiamo qui a ricordare i punti essenziali.

a) I caratteri intrinseci di un riferimento fisico si riassumono nei tre tensori spaziali (cioè appartenenti a Σ)

$$(4) \quad C_i = \gamma^r \nabla_r \gamma_i, \quad \tilde{K}_{ij} = \gamma^4 \partial_4 \gamma_{ij}, \quad \tilde{\Omega}_{ij} = \gamma_4 \left(\tilde{\partial}_i \frac{\gamma_j}{\gamma_4} - \tilde{\partial}_j \frac{\gamma_i}{\gamma_4} \right),$$

ove $\tilde{\partial}_i \equiv \partial_i + \gamma_i \gamma^4 \partial_4$ ($\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$) indica la cosiddetta *derivazione trasversa*. Nelle (4) C_i è il *vettore di curvatura* delle linee x^4 ; il tensore simmetrico $\tilde{K}_{ij}$, legato al modo di variare del tensore metrico spaziale $\gamma_{ij} \equiv g_{ij} + \gamma_i \gamma_j$, dà la *velocità di deformazione* del fluido di riferimento; il tensore $\tilde{\Omega}_{ij}$ infine, antisimmetrico, è legato al moto rotatorio locale del fluido e ha il nome di *tensore vortice spaziale*.

b) I caratteri relativi di una particella, anche non materiale quale, ad esempio, un fotone (cfr. [6]), si compendiano nelle due grandezze, *velocità relativa standard*:

$$(5) \quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dT} \quad ; \quad v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} v^\beta$$

e massa relativa standard:

$$(6) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} v_\alpha v^\alpha}}$$

ove

$$(7) \quad dT = -\frac{1}{c} \gamma_i dx^i$$

è l'intervallo di tempo relativo standard tra due eventi infinitamente prossimi sulla linea oraria della particella.

Con le due quantità m , v_α testé richiamate, si definisce la *quantità di moto relativa standard*:

$$(8) \quad p^\alpha = m v^\alpha \quad ; \quad p_\alpha = m v_\alpha.$$

Adottando le suddette definizioni si riconosce che le (3) equivalgono al sistema:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\hat{D} p_\alpha}{dT} = -mc^2 C_\alpha + mc \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} v^\beta \\ \frac{dx^4}{dT} = \gamma^4 (c + \gamma_\beta v^\beta) \end{array} \right. \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

ove

$$(10) \quad \frac{\hat{D} p_\alpha}{dT} \equiv \frac{dp_\alpha}{dT} - (\alpha\beta, \delta) p^\beta v^\delta = \frac{dp_\alpha}{dT} - \frac{1}{2} \tilde{\partial}_\alpha \gamma_{\beta\delta} p^\beta v^\delta$$

dà la cosiddetta derivata temporale sostanziale del vettore p_α . Le (9) costituiscono evidentemente un sistema di quattro equazioni differenziali del 2° ordine nelle incognite $x^i(T)$ ⁽²⁾.

Le equazioni (9)₁, tipicamente newtoniane, suggeriscono di interpretare il vettore spaziale

$$(11) \quad G_\alpha \equiv -c^2 C_\alpha + c \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} v^\beta$$

come *campo gravitazionale* relativo al riferimento S. Esso risulta somma di un *campo di trascinamento* (cfr. [2], p. 336)

$$-c^2 C_\alpha = -c^2 \tilde{\partial}_\alpha \log(-\gamma_4) + c^2 \partial_4 (\gamma_\alpha / \gamma_4)$$

e di un *campo di Coriolis*

$$c \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} v^\beta = -2 (\omega \wedge v)_\alpha.$$

La stretta analogia col caso classico si rileva anche nel teorema della energia che si scrive (cfr. [3])

$$(12) \quad \frac{dE}{dT} = m G_\alpha v^\alpha - \frac{1}{2} mc \tilde{K}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta,$$

essendo

$$(13) \quad E \equiv -c \gamma_i P^i = mc^2$$

l'energia materiale relativa standard della particella.

In tale equazione figura un termine che non è abituale nell'equazione classica, dovuto alla deformazione del riferimento. Si noti però che un termine perfettamente simile appare anche classicamente quando venga assunto un riferimento fluido (cfr. [7], p. 79 ed anche il n. 5 della Nota II).

(2) Generalmente esse vanno considerate in blocco. Se però V_4 è stazionaria, e in essa si assume un riferimento adattato a tale carattere, nel gruppo delle equazioni (9)₁ non v'è traccia della variabile x^4 , ed esse bastano da sole a determinare le tre funzioni $x^\alpha(T)$ (note che siano le circostanze iniziali).

2. - L'EQUAZIONE DI MOTO IN FORMA CONTROVARIANTE.

L'equazione (9)_i ha forma covariante. Proponiamoci ora di trasformarla in forma controvariante. Per questo cominciamo con l'osservare che la (9)_i può anche scriversi, moltiplicando per $\gamma^{\alpha\nu}$ e sommando rispetto ad α ,

$$\begin{aligned} \frac{dp^\nu}{dT} - p_\alpha \left(\partial_\beta \gamma^{\alpha\nu} \frac{dx^\beta}{dT} + \partial_4 \gamma^{\alpha\nu} \frac{dx^4}{dT} \right) + \gamma^{\alpha\nu} [(\tilde{\beta}\tilde{\delta}, \alpha) - \tilde{\partial}_\beta \gamma_{\alpha\delta}] p^\beta v^\delta = \\ = -mc^2 C^\nu + mc \tilde{\Omega}^\nu{}_\beta v^\beta \end{aligned}$$

ovvero, tenuto conto della (9)₂,

$$\begin{aligned} \frac{dp^\nu}{dT} + \left\{ \tilde{\gamma} \right\}_{\beta\delta} p^\beta v^\delta - p_\alpha (\partial_\beta \gamma^{\alpha\nu} + \gamma_\beta{}^\gamma \partial_4 \gamma^{\alpha\nu}) v^\beta - c p_\alpha \gamma^4 \partial_4 \gamma^{\alpha\nu} - \gamma^{\alpha\nu} \tilde{\partial}_\beta \gamma_{\alpha\delta} p^\beta v^\delta = \\ = -mc^2 C^\nu + mc \tilde{\Omega}^\nu{}_\beta v^\beta. \end{aligned}$$

In parentesi tonda si riconosce la derivata trasversa $\tilde{\partial}_\beta \gamma^{\alpha\nu}$. Avendosi d'altra parte $\gamma^{\alpha\nu} \tilde{\partial}_\beta \gamma_{\alpha\delta} = -\gamma_{\alpha\delta} \tilde{\partial}_\beta \gamma^{\alpha\nu}$ si ha l'evidente elisione di due termini, in modo che l'equazione precedente assume la forma

$$(14) \quad \frac{dp^\nu}{dT} + \left\{ \tilde{\gamma} \right\}_{\beta\delta} p^\beta v^\delta = -mc^2 C^\nu + mc \tilde{\Omega}^\nu{}_\beta v^\beta + c p_\alpha \gamma^4 \partial_4 \gamma^{\alpha\nu}.$$

Posto, in analogia alla (10) e con lo stesso carattere invariantivo rispetto alle (2),

$$(15) \quad \frac{\hat{D}p^\alpha}{dT} \equiv \frac{dp^\alpha}{dT} + \left\{ \tilde{\alpha} \right\}_{\beta\delta} p^\beta v^\delta$$

(derivata sostanziale del vettore controvariante p^α)⁽³⁾ e tenuto conto che $p_\alpha \partial_4 \gamma^{\alpha\nu} = \gamma_{\alpha\beta} p^\beta \partial_4 \gamma^{\alpha\nu} = -\gamma^{\alpha\nu} \partial_4 \gamma_{\alpha\beta} p^\beta$, l'equazione (14) diviene

$$(14') \quad \frac{\hat{D}p^\nu}{dT} = -mc^2 C^\nu + mc (\tilde{\Omega}^\nu{}_\beta - \tilde{K}^\nu{}_\beta) v^\beta \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

L'equazione ora scritta, ancora di tipo newtoniano come la (9)_i, suggerisce una nuova definizione di *campo gravitazionale* relativo:

$$(16) \quad G^\alpha \equiv -c^2 C^\alpha + c (\tilde{\Omega}^\alpha{}_\beta - \tilde{K}^\alpha{}_\beta) v^\beta = G^\alpha - c \tilde{K}^\alpha{}_\beta v^\beta,$$

ove il campo precedente, G_α appare completato da un termine che dipende direttamente dalla velocità relativa e dalla deformazione del fluido.

Si noti che nella nuova definizione (16), a differenza della (11), intervengono *tutti e tre* i caratteri intrinseci del riferimento e che G^α si annulla, qua-

(3) Si noti che i due vettori spaziali $\frac{\hat{D}p_\alpha}{dT}$ e $\frac{\hat{D}p^\alpha}{dT}$, benché entrambi perfettamente legittimi perché invarianti rispetto al gruppo (2), non si ottengono l'uno dall'altro per semplice innalzamento dell'indice (mediante il tensore metrico spaziale $\gamma_{\alpha\beta}$), in quanto $\gamma_{\alpha\beta}$ dipende generalmente (oltre che da x^1, x^2, x^3) anche da x^4 e tale circostanza interviene in modo essenziale nella derivazione rispetto a T.

lunque sia il moto che si considera, cioè *per ogni* v^3 , *solo se il riferimento è ad un tempo geodetico, irrotazionale e rigido*:

$$C_\alpha = 0, \quad \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = 0, \quad \tilde{K}_{\alpha\beta} = 0.$$

In tal caso, avuto riguardo alle (5), (8) e (15), la (14') assume la forma

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dT} v^\nu + \frac{d^2 x^\nu}{dT^2} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \beta\delta \end{matrix} \right\} \frac{dx^\beta}{dT} \frac{dx^\delta}{dT} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

D'altra parte le sole condizioni $C_\alpha = 0$, $\tilde{K}_{\alpha\beta} = 0$ implicano, per le (12) e (13), $E = mc^2 = \text{cost.}$, ovvero [cfr. (16)] $v^2(T) = \text{cost.}$ (moto uniforme). Se pertanto è $G_\alpha = 0$ risulta verificata, come è naturale, la legge d'inerzia nella forma seguente: la traiettoria spaziale $x^\alpha = x^\alpha(T)$ è una geodetica dello spazio fisico⁽⁴⁾ ed è descritta con velocità di grandezza costante.

(4) Si noti che la sola condizione $\tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = 0$ implica la normalità della congruenza di riferimento e le varietà V_3 normali danno l'evoluzione dello spazio fisico. Se poi $C_\alpha = 0$ si ha l'integrabilità della forma differenziale $dT \equiv -\frac{1}{c} \gamma_i dx^i$, ciò che permette di associare, alle precedenti varietà V_3 , un tempo pantopico T .