Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Claudio Procesi

Sopra un teorema di Goldie riguardante la struttura degli anelli primi con condizioni di massimo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.4, p. 372–377.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_4_372_0¿

Matematica. — *Sopra un teorema di Goldie riguardante la struttura degli anelli primi con condizioni di massimo.* Nota di CLAUDIO PROCESI, presentata [*] dal Socio B. SEGRE.

Nei lavori [1] e [2] [(1)], A. W. Goldie ha dato un teorema di struttura degli anelli primi che verificano una condizione debole di massimo. Ivi precisamente si dimostra che, per un anello R, sono equivalenti le seguenti condizioni:

a) R è un anello primo, tale che ogni insieme di ideali sinistri annullatori possiede un elemento massimale ed inoltre non esistono famiglie infinite di ideali sinistri di R diversi da $\{0\}$ formanti somma diretta;

b) R possiede un anello di quozienti a sinistra isomorfo ad un anello di matrici sopra un corpo [(2)].

Nel presente lavoro si dà una nuova dimostrazione di tale risultato, la quale appare notevolmente più semplice di quelle precedentemente note.

La dimostrazione che la condizione *a*) implica la *b*) si articola in 4 paragrafi. Nel § 1 si richiamano alcune definizioni; nel § 2 si provano alcune proposizioni necessarie per la trattazione successiva; il § 3 è il centro della successiva dimostrazione: in esso si costruisce uno spazio vettoriale V, di dimensione finita, che risulta dotato di una struttura di modulo destro fedele rispetto all'anello R considerato; infine nel § 4 si prova che l'anello degli endomorfismi dello spazio vettoriale V è anello dei quozienti a sinistra dell'anello R. La parte inversa, *b*) implica *a*), viene brevemente stabilita nel § 5.

1. Sarà opportuno richiamare anzitutto alcune definizioni.

Dato un insieme T di elementi di un anello R, l'insieme $T_d = \{x \in R \mid Tx = 0\}$ è un ideale a destra di R, che si chiama *annullatore destro* di T. L'insieme $T_s = \{x \in R \mid xT = 0\}$ è un ideale a sinistra, che si chiama *annullatore sinistro* di T. In seguito, dicendo ad esempio che un ideale a destra I è un annullatore, intenderemo che $I = T_d$ per un conveniente sottoinsieme T di R. Evidentemente, per due sottoinsiemi T e S di R tali che $T \subset S$, si ha: $T_d \supset S_d$ e $T_s \supset S_s$.

DEFINIZIONE. – *Un anello* R *si dice primo se verifica una* (*e quindi ciascuna*) *delle seguenti condizioni, fra loro equivalenti:*

(*) Nella seduta del 20 aprile 1963.

(1) I numeri fra [ ] rinviano alla Bibliografia posta alla fine della Nota.

(2) In effetti, il GOLDIE in [1] dimostra l'equivalenza non di *a*) e *b*), ma delle condizioni che si ottengono rispettivamente: da *a*) aggiungendo alle ipotesi sugli ideali a sinistra analoghe ipotesi sugli ideali a destra e da *b*) imponendo che l'anello dei quozienti a sinistra sia anche anello dei quozienti a destra. In [2], il GOLDIE dimostra un risultato più generale dell'equivalenza fra *a*) e *b*), che si può però ricavare facilmente da tale equivalenza.

a) *se* $U \neq \{0\}$ *e* $V \neq \{0\}$ *sono due ideali bilaterali di* R, *allora* $UV \neq \{0\}$;

b) *l'annullatore destro di ogni ideale destro di* R, *diverso da* $\{0\}$, *è* $\{0\}$;

c) *l'annullatore sinistro di ogni ideale sinistro di* R, *diverso da* $\{0\}$, *è* $\{0\}$;

d) *Se* a *e* b *sono due elementi di* R *tali che* $aRb = \{0\}$, *o* $a = 0$ *oppure* $b = 0$.

Una proprietà degli anelli primi, spesso utilizzata in seguito, è la seguente: se $I \neq \{0\}$ è un ideale a destra e $J \neq \{0\}$ è un ideale a sinistra di un anello primo R, allora $I \cap J \neq \{0\}$: infatti $\{0\} \neq IJ \subset I \cap J$.

Nei seguenti paragrafi R designerà sempre un anello primo verificante le seguenti condizioni:

I) *Ogni insieme non vuoto di ideali a sinistra di* R *annullatori, ordinato per inclusione, possiede un elemento massimale.*

II) *Non esiste una famiglia infinita di ideali a sinistra di* R *diversi da* $\{0\}$ *e formanti somma diretta.*

2. Consideriamo in R un ideale a sinistra, F, annullatore proprio (cioè $F \neq R$) e per di più massimale. Per F ed F_d valgono le due seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE 1. – *Se* $0 \neq a \in F_d$, *si ha* $\{a\}_s = F$.

Dim.: Poiché R è primo, si ha $R \neq \{a\}_s$; inoltre $\{a\}_s \supset F_{ds} = F$, quindi $\{a\}_s = F$ per la supposta massimalità di F.

Questa proposizione implica in particolare che, se $u \in F_d$, l'endomorfismo λ_u di F_d definito da $\lambda_u(x) = ux$ è tale che siano possibili due soli casi: $\operatorname{Ker} \lambda_u = F_d$, oppure $\operatorname{Ker} \lambda_u = \{0\}$.

PROPOSIZIONE 2. – *Se* $I_1 \neq \{0\}$ *e* $I_2 \neq \{0\}$ *sono due ideali a sinistra di* R *tali che* $I_1 \cap I_2 = \{0\}$, *si ha*: $F \cap (I_1 \oplus I_2) \neq \{0\}$.

Dim.: Supponiamo per assurdo $F \cap (I_1 \oplus I_2) = \{0\}$; allora, poiché R è primo, $I_1 \cap F_d \neq \{0\}$. Consideriamo un elemento $a_1 \neq 0$ in $I_1 \cap F_d$; gli ideali a sinistra $I_1 a_1$, $I_2 a_1$, I_2 sono diversi da $\{0\}$, formano somma diretta e si ha: $I_1 a_1 \oplus I_2 a_1 \oplus I_2 \subset I_1 \oplus I_2$. Consideriamo ora un elemento $a_2 \neq 0$ in $I_1 a_1 \cap F_d$; gli ideali a sinistra $I_1 a_1 a_2$, $I_2 a_1 a_2$, $I_2 a_1$, I_2 sono ancora tutti diversi da $\{0\}$ e formano somma diretta. Procedendo in questo modo, si perviene ad una somma diretta di una infinità numerabile di ideali a sinistra diversi da $\{0\}$:

$$I_2, I_2 a_1, I_2 a_1 a_2, \cdots, I_2 a_1 a_2 \cdots a_n, \cdots$$

contraddicendo la condizione II del § 1. E ciò dimostra l'asserto.

Le due proposizioni precedenti permettono di stabilire un teorema che avrà fondamentale importanza per il seguito. Chiamiamo E l'anello degli R endomorfismi di F_d (considerato come modulo destro su R) del tipo λ_u, $u \in F_d$ e $\lambda_u x = ux$. Poiché R è primo, $F_d^2 \neq \{0\}$ e quindi E contiene elementi diversi da zero. Abbiamo visto (prop. 1) che gli elementi di E diversi da zero sono endomorfismi non degeneri, sicché E non ha divisori dello zero; mostriamo che, detto E′ l'anello degli R endomorfismi di F_d generato da E e dall'applicazione i identica di F_d, gli elementi di E′ sono ancora endomorfismi non degeneri e quindi anche E′ è privo di divisori dello zero. Infatti E′ è l'insieme degli endomorfismi della forma $\lambda_u + ni$, con $u \in F_d$ e n numero intero; se λ_v è un elemento di E diverso da zero, $\lambda_v(\lambda_u + ni) \in E$, e $\operatorname{Ker} \lambda_v(\lambda_u + ni) = \operatorname{Ker}(\lambda_u + ni)$; quindi $\operatorname{Ker}(\lambda_u + ni) = \{0\}$, oppure $\operatorname{Ker}(\lambda_u + ni) = F_d$. Con le precedenti notazioni, enunciamo il

TEOREMA 1. – *L'anello* E′ *possiede un corpo* K *di quozienti a sinistra.*

Dim.: Poiché, come si è visto testè, l'anello E′ non ha divisori dello zero, in base ad un noto risultato di Ore [3] è sufficiente mostrare che, presi comunque due elementi x, y diversi da zero di E′ esistono due elementi u, v di E′ tali che $0 \neq ux = vy$. Poiché $EE' = E$, la proprietà sussisterà per ogni coppia di elementi x, y diversi da zero di E′ quando valga per ogni coppia di elementi x, y diversi da zero di E. Siano dunque $\lambda_{u_1} \neq 0$, $\lambda_{u_2} \neq 0$ due elementi di E, ove $u_1 \in F_d$ e $u_2 \in F_d$. Distinguiamo i due casi:

$$Ru_1 \cap Ru_2 \neq \{0\} \quad \text{e} \quad Ru_1 \cap Ru_2 = \{0\}.$$

Nel primo caso, esistono due elementi a_1, a_2 di R tali che $a_1 u_1 = a_2 u_2 \neq 0$; poiché R è primo, $F_d a_1 u_1 \neq \{0\}$, sicché, se $u \in F_d$ è tale che $ua_1 u_1 \neq 0$, si ha $\lambda_{ua_1} \lambda_{u_1} = \lambda_{ua_2} \lambda_{u_2} \neq 0$. Nel secondo caso, $F \cap (Ru_1 \oplus Ru_2) \neq \{0\}$; pertanto se $0 \neq a \in F \cap (Ru_1 \oplus Ru_2)$ si ha $a = b_1 u_1 + b_2 u_2$, $aF_d = \{0\}$. Poiché $F_d a \neq \{0\}$ esiste $v \in F_d$ tale che $va \neq 0$, poiché $\lambda_{va} = 0$ si ha:

$$\lambda_{vb_1} \lambda_{u_1} = \lambda_{-vb_2} \lambda_{u_2} \neq 0$$

non può essere $\lambda_{vb_1} \lambda_{u_1} = 0$ poiché altrimenti $\lambda_{vb_1} = \lambda_{vb_2} = 0$ e quindi $va = 0$.

È importante osservare che, per ogni elemento x del suddetto corpo K, esistono due elementi $u \in F_d$, $v \in F_d$ tali che $\lambda_u \neq 0$, $x = \lambda_u^{-1} \lambda_v$ (questo discende dalla relazione $EE' = E$); ne consegue che K è anche corpo dei quozienti a sinistra di E.

3. Avendo F_d una struttura di modulo sinistro su E′ e K una struttura di modulo destro su E′, consideriamo il prodotto tensoriale:

$$V = K \underset{E'}{\otimes} F_d .$$

Questo è dotato di una struttura naturale di spazio vettoriale sinistro su K, definita ponendo per $k \in K$, $w = k_1 \otimes u \in K \underset{E'}{\otimes} F_d$:

$$k(k_1 \otimes u) = (kk_1) \otimes u .$$

È noto che l'applicazione j di F_d in V data da $j(u) = 1 \otimes u$ è iniettiva e che ogni elemento w di V è della forma $w = kj(u)$, con $k \in K$, $u \in F_d$ [4]. Inoltre, poiché $k = \lambda_t^{-1} \lambda_v$ con $t \in F_d$, $v \in F_d$, si ha: $w = \lambda_t^{-1} j(vu)$. Di ciò ci varremo nello stabilire il

TEOREMA 1. – *Lo spazio vettoriale* V *ha dimensione finita.*

Dim.: Poiché $V = Kj(F_d)$, possiamo scegliere una base di V formata da elementi di $j(F_d)$, siano essi: $\{j(u_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Mostriamo che gli ideali a sinistra Ru_α (tutti diversi da $\{0\}$ poiché R è primo) formano somma diretta. Se infatti fosse $\sum_{k=1}^{n} a_k u_{\alpha_k} = 0$ e, ad esempio, $a_1 u_{\alpha_1} \neq 0$, preso $v \in F_d$ tale che $va_1 u_{\alpha_1} \neq 0$ (un v siffatto esiste in quanto R è primo), si avrebbe

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{va_k} j(u_{\alpha_k}) = 0 \qquad e \qquad \lambda_{va_1} \neq 0 .$$

Ma questo implica che A sia un insieme finito, poiché R verifica la condizione II del § 1.

Dal momento che F_d è modulo destro su R e gli elementi di R sono permutabili con gli elementi di E′, V è modulo destro su R e gli elementi di R dànno luogo ad endomorfismi di V considerato come spazio vettoriale su K. D'altro canto, F_d è un R–modulo fedele [3] poiché R è primo, quindi anche V è un R–modulo fedele poiché j è un'applicazione iniettiva. R vien così identificato con un sottoanello dell'anello Q dei K–endomorfismi di V operanti a destra; chiameremo φ l'isomorfismo di R in Q corrispondentemente definito.

È ora facile dare la struttura di R tramite l'anello Q, il che ci accingiamo a fare nel prossimo paragrafo.

4. Ricordiamo che, dato un anello A, si dice che un anello B è anello dei quozienti a sinistra di A se esiste un isomorfismo φ di A su di un sottoanello $\varphi(A)$ di B tale che $\varphi(c)$ sia invertibile per ogni elemento regolare [4] $c \in A$ ed inoltre ogni elemento di B sia della forma $\varphi(c)^{-1}\varphi(a)$ con $a \in A$, $c \in A$ e c regolare.

Nel caso dell'anello R da noi considerato è facile vedere che un elemento c è regolare se, e solo se, $\operatorname{Ker} \varphi(c) = 0$, cioè allorquando $\varphi(c)$ è invertibile in Q. Proverèmo che Q è anello dei quozienti a sinistra di R; per ottenere questo risultato, conviene premettere una definizione e un lemma.

DEFINIZIONE. – *Diremo che un ideale a sinistra* I *di* R *incontra tutti gli ideali se, preso comunque un ideale a sinistra* $J \neq \{0\}$ *di* R, *risulta* $I \cap J \neq \{0\}$.

LEMMA. – *Un ideale a sinistra* I *di* R, *che incontri tutti gli ideali, contiene un elemento regolare.*

Dim.: Sia n la dimensione di V; determiniamo n elementi $u_1, \cdots, u_n$ di I tali che verifichino le seguenti condizioni:

1° $\varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_n)$ siano di rango 1;
2° $u_i^2 \neq 0$ per ogni i;
3° $u_i u_j = 0$ per $j < i$.

(3) Ricordiamo che un R–modulo destro M si dice fedele quando $Mx = (0)$, con $x \in R$, implica $x = 0$.

(4) Ricordiamo che un elemento c di un anello A si dice regolare quando $(c)_s = (0)$ e $(c)_d = (0)$.

Supponiamo di aver già scelto k elementi $u_1, u_2, \cdots, u_k$ soddisfacenti alle condizioni poste con $k < n$; si ha che $\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} \varphi(u_i) \neq \{0\}$, poiché dim $\operatorname{Ker} \varphi\{u_i\} = n - 1$. Scegliamo un elemento $u \neq 0$ di F_d tale che $j(u) \in \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} \varphi(u_i)$. Per ipotesi $Ru \cap I \neq \{0\}$ e, essendo R primo, esiste un elemento $au \in (Ru \cap I)$ tale che $uau \neq 0$; ma $\varphi(u)$ è di rango 1, poiché $\operatorname{Im} \varphi(u) = Kj(u)$, e quindi, se $aub = 0$ con a e b elementi di R, o $au = 0$ oppure $ub = 0$, sicché $auau \neq 0$. Poniamo $u_{k+1} = au$; evidentemente, gli elementi $u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}$ verificano le condizioni poste. Considerato l'elemento $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, si ha:

$$\operatorname{Ker} \varphi(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi(u_i);$$

infatti, se $x\varphi(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 0$, moltiplicando successivamente questa eguaglianza per $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \cdots, \varphi(u_n)$ si ottiene $x\varphi(u_1^2) = 0$ e quindi $x\varphi(u_1) = 0$, poiché $\varphi(u_1)$ ha rango 1 e $\varphi(u_1^2) \neq 0$; inoltre $x\varphi(u_2^2) = 0$ e quindi $x\varphi(u_2) = 0$; e così via, fino a $x\varphi(u_n^2) = 0$ e quindi $x\varphi(u_n) = 0$. Ma $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi(u_i) = \{0\}$, poiché $\operatorname{Ker} \varphi(u_k) \cap \left(\bigcap_{i<k} \operatorname{Ker} \varphi(u_i)\right) \neq \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \operatorname{Ker} \varphi(u_i)\right)$, e quindi $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} \varphi(u_i)\right) = \dim\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \operatorname{Ker} \varphi(u_i)\right) - 1$ onde $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi(u_i)\right) = 0$. Pertanto $u_1 + u_2 + \cdots + u_n \in I$ è regolare.

TEOREMA. – *L'anello Q dei K-endomorfismi di V è anello dei quozienti a sinistra di* R.

Dim.: L'isomorfismo φ di R in Q è stato già determinato, e si è notato che $\varphi(c)$ è invertibile in Q se c è elemento regolare di R; si tratta quindi soltanto più di dimostrare che ogni elemento $m \in Q$ è della forma $\varphi(c)^{-1} \varphi(x)$, con $x \in R$, $c \in R$ e c regolare. Poniamo $T = \{x \in R \mid \varphi(x) m \in \varphi(R)\}$, onde T è un ideale a sinistra di R; dimostriamo che T incontra tutti gli ideali. Siano I un ideale a sinistra di R diverso da $\{0\}$ ed $u \neq 0$ un elemento di $I \cap F_d$. Consideriamo $j(u) m \in V$; si ha $j(u) m = \lambda_v^{-1} j(w)$, con $v \in F_d$, $w \in F_d$ e $\lambda_v \neq 0$, sicché $j(vu) m = j(w)$. Ne consegue facilmente che $\varphi(vu) m = \varphi(w)$. Infatti, poiché $j(F_d)$ genera V, basta dimostrare che $\varphi(vu) m$ e $\varphi(w)$ coincidono su $j(F_d)$; ora, se x è un elemento di F_d, si ha:

$$j(x) \varphi(vu) m = \lambda_x j(vu) m = \lambda_x j(w) = j(x) \varphi(w).$$

Poiché $\lambda_v \neq 0$, anche $vu \neq 0$ e $vu \in T \cap I$. Quindi T incontra tutti gli ideali, e perciò contiene un elemento regolare c; esiste perciò un $x \in R$ tale che $m = \varphi(c)^{-1} \varphi(x)$.

5. In quest'ultimo paragrafo ci proponiamo d'invertire il risultato del § 4. Dimostreremo precisamente il seguente

TEOREMA. – *Se* Q *è un anello di matrici sopra un corpo ed* R *è un suo sottoanello tale che* Q *sia anello dei quozienti a sinistra di* R, *si ha che:*

a) R *verifica la condizione* I *del* § 1;
b) R *verifica la condizione* II *del* § 2;
c) R è *primo*.

Dim.: La *a*) discende dalla seguente proposizione più generale. Siano A e B due anelli e $B \subset A$; se A verifica la condizione I del § 1, anche B la verifica. Infatti sia $\{T_\alpha\}_{\alpha \in S}$ una famiglia di parti di B, $\{(T_\alpha)_s\}_{\alpha \in S}$ la famiglia dei rispettivi annullatori sinistri in B e $\{(T_\alpha)'_s\}_{\alpha \in S}$ la famiglia dei rispettivi annullatori sinistri in A; allora, se U'_s è massimale fra i $\{(T_\alpha)'_s\}_{\alpha \in S}$, ne consegue che U_s è massimale fra i $\{(T_\alpha)_s\}_{\alpha \in S}$;

b) sia $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di ideali a sinistra di R, formanti somma diretta. Basta dimostrare che gli ideali a sinistra di Q: $\{QI_\alpha\}_{\alpha \in A}$ formano somma diretta. Supponiamo per assurdo che $\sum_{i=1}^{n} q_i a_{\alpha_i} = 0$, con $q_i \in Q$, $a_{\alpha_i} \in I_{\alpha_i}$ e $q_1 a_{\alpha_1} \neq 0$. Riduciamo allo stesso denominatore tutti gli elementi q_i: $q_i = c^{-1} b_i$, $c \in R$, $b_i \in R$ con c regolare. Ne consegue $\sum_{i=1}^{n} b_i a_{\alpha_i} = 0$ e $b_1 a_{\alpha_1} \neq 0$, il che non può essere;

c) sia I un ideale a sinistra di Q; se c è un elemento regolare di Q e $Ic \subset I$, si ha $Ic = I$ (basta considerare I decomposto in somma diretta di ideali sinistri minimali), e quindi $Ic^{-1} = I$. Supponiamo ora per assurdo che un ideale a sinistra $J \neq \{0\}$ di R sia tale che $J_s \neq \{0\}$. Se T è l'annullatore sinistro di J in Q, $T \neq \{0\}$, e c è un elemento regolare di R, c è anche elemento regolare di Q e da $cJ \subset J$ segue $Tc \subset T$; pertanto $Tc^{-1} = T$ ed infine $TQJ = \{0\}$, il che però è assurdo in quanto Q è un anello primo.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. W. GOLDIE, *The structure of prime rings under ascending chain conditions*, « Proc. London Math. Soc. » (3), *8*, 589–608 (1958).

[2] A. W. GOLDIE, *Semi-prime rings with maximum condition*, « Proc. London Math. Soc. » (3), *10*, 201–220 (1960).

[3] O. ORE, *Linear equations in non-commutative fields*, « Ann. of Math. », *32*, 463–477 (1931).

[4] N. BOURBAKI, *Algèbre* (Hermann 1958), Chap. 3, p. 29.