Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

György Adler

Maggiorazione delle tensioni in un corpo elastico mediante gli spostamenti superficiali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.4, p. 369–371.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_4_369_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Analisi matematica. — *Maggiorazione delle tensioni in un corpo elastico mediante gli spostamenti superficiali.* Nota di GYÖRGY ADLER, presentata [*] dal Socio M. PICONE.

INTRODUZIONE. – In questa Nota esporremo maggiorazioni numeriche per le tensioni che si destano in un corpo elastico, dovute a spostamenti superficiali. Questi risultati sono stati ottenuti con un metodo usato dallo autore nella sua Memoria [1], e successivamente esteso nel suo lavoro [2] [1], per stabilire maggiorazioni numeriche per il gradiente delle funzioni armoniche e caloriche.

Per adoperare questo nostro metodo, ci serviamo di un teorema di massimo modulo per l'elasticità dovuto a G. Fichera (vedere [5]).

§ 1. – DEFINIZIONI.

Si consideri il sistema delle equazioni omogenee dell'equilibrio elastico

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} \Delta u_i + k \dfrac{\partial \Theta}{\partial x_i} = 0 & (i = 1, 2, 3) \\ \Theta = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} & (k = \text{costante} > -1) \end{cases}$$

nel campo (insieme aperto e connesso) limitato Ω dello spazio euclideo (x_1, x_2, x_3); indichiamo con Σ la frontiera di Ω.

Sia $C(m, n; \Omega)$ la classe delle funzioni vettoriali reali $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ a tre componenti, le quali sono dotate di derivate parziali continue fino all'ordine m in $\Omega + \Sigma$ e fino all'ordine n in Ω.

Il teorema citato di Fichera, del massimo modulo, stabilisce che se Σ è abbastanza regolare, allora per ogni soluzione u di classe $C(0, 2; \Omega)$ del sistema (E) sussiste la disuguaglianza:

$$(1) \qquad \max_{\Omega+\Sigma} |u| \leqq H \max_{\Sigma} |u|,$$

dove H è una costante dipendente unicamente da Ω e da k.

Supponiamo che esista il piano tangente T_P in ogni punto P di Σ. Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $(\xi_1^P, \xi_2^P, \xi_3^P)$ [2] coll'origine in P, di cui gli assi ξ_1^P, ξ_2^P siano collocati nel piano T_P. Sia $\Psi_P(r)$ la parte di Σ formata dall'insieme connesso dei suoi punti contenente il punto P, interni al cilindro $\{\xi_1^{P2} + \xi_2^{P2} = r^2, -\infty < \xi_3^P < +\infty\}$.

(*) Nella seduta del 20 aprile 1963.

(1) In corso di stampa. I risultati sono stati pubblicati nelle Note preventive [3] e [4].

(2) L'indice superiore P verrà omesso se ciò non dà luogo ad equivoco.

In tale sistema di coordinate, appartenente a P, sia

$$\xi_3^{\mathrm{P}} = f_{\mathrm{P}}(\xi_1^{\mathrm{P}}, \xi_2^{\mathrm{P}}) \tag{2}$$

l'equazione di $\Psi_{\mathrm{P}}(r)$.

Diremo che il campo Ω appartiene alla classe $\mathfrak{A}_r(\beta, \mathrm{L})$ $(0 < \beta \leqq 1$, $\mathrm{L} > 0)$, se

1° in ogni punto P di Σ esiste il piano tangente;

2° per ogni punto P di Σ l'intorno $\Psi_{\mathrm{P}}(r)$ ammette la rappresentazione (2), dove f_{P} è una funzione univalente e soddisfacente alla condizione

$$|f_{\mathrm{P}}(\xi_1, \xi_2) - f_{\mathrm{P}}(0, 0)| \leqq \mathrm{L}(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1+\beta}{2}} \qquad (\xi_1^2 + \xi_2^2 < r^2),$$

con L e β indipendenti da P;

3° per ogni punto P di Σ esiste una sfera di raggio r, la cui frontiera contiene P, ed il cui interno è collocato in Ω.

La funzione (eventualmente vettoriale) F(R) $(\mathrm{R} \in \Sigma)$ definita sulla superficie Σ, sarà assegnata nell'intorno $\Psi_{\mathrm{P}}(r)$ sotto la forma $\mathrm{F}(\mathrm{R}) = \mathrm{F}_{\mathrm{P}}(\xi_1^{\mathrm{P}}, \xi_2^{\mathrm{P}})$ (3).

Diremo che la funzione F, definita su Σ, è di classe $\mathfrak{H}_r(\alpha, \mathrm{K})$ $(0 < \alpha \leqq 1$, $\mathrm{K} > 0)$, se riesce, con costanti r, α, K indipendenti da P:

$$|\mathrm{F}_{\mathrm{P}}(\xi_1, \xi_2) - \mathrm{F}_{\mathrm{P}}(0, 0)| \leqq \mathrm{K}(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{\alpha}{2}} \qquad (\xi_1^2 + \xi_2^2 < r^2).$$

Per la funzione vettoriale $\mathrm{F} = \{\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3\}$ definita su Σ, introduciamo le notazioni seguenti:

$$\mathrm{M}_0(\mathrm{F}) = \max_{\Sigma} |\mathrm{F}|,$$

$$\mathrm{M}_1(\mathrm{F}) = \max_{\mathrm{P} \in \Sigma} \max_{\substack{i=1,2 \\ h=1,2,3}} \left| \frac{\partial \mathrm{F}_{h_{\mathrm{P}}}(0, 0)}{\partial \xi_i} \right|,$$

$$\mathrm{M}_2(\mathrm{F}) = \max_{\mathrm{P} \in \Sigma} \max_{\substack{i,j=1,2 \\ h=1,2,3 \\ 0 \leqq \gamma \leqq 2\pi}} \sqrt{\int_0^r \left(\frac{\partial \mathrm{F}_{h_{\mathrm{P}}}(t\cos\gamma, t\sin\gamma)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right)^2 dt}.$$

§ 2. – Maggiorazioni.

Teorema 1. – *Supponiamo, che*

1° $\Omega \in \mathfrak{A}_r(\beta, \mathrm{L})$;

2° *la funzione* $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ *sia una soluzione di classe* $\mathrm{C}(1, 3; \Omega)$ *del sistema* (E) *in* Ω;

3° *per la traccia* $u(\xi_1, \xi_2)$ *della funzione* u *risulti:*

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \in \mathfrak{H}_r(\alpha, \mathrm{K}) \qquad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2).$$

(3) Se questo non dà luogo ad equivoco, l'indice P sarà omesso: $\mathrm{F}(\mathrm{R}) = \mathrm{F}(\xi_1, \xi_2)$.

Allora

$$\max_{\Omega+\Sigma}\ \max_{i=1,2,3} |\operatorname{grad} u_i| \leqq A_0(\omega) M_0(u) + A_1(\omega) M_1(u) + A_2(\omega)\, \omega^\alpha r^\alpha \frac{K}{\alpha},$$

dove

$$A_0(\omega) = \frac{H(A+BH)}{r\omega\left[1 - H(1 + r^\beta L) C \dfrac{\omega^\beta}{\beta}\right]},$$

$$A_1(\omega) = \frac{\sqrt{54}\, H}{1 - H(1 + r^\beta L) C \dfrac{\omega^\beta}{\beta}},$$

$$A_2(\omega) = \frac{\sqrt{2}\, HC}{1 - H(1 + r^\beta L) C \dfrac{\omega^\beta}{\beta}},$$

ω *variando nell'intervallo qui sotto indicato:*

$$0 < \omega < \min\left[\frac{\pi}{2}, \left(\frac{\beta}{H(1 + r^\beta L) C}\right)^{1/\beta}\right];$$

H *è la costante che figura nella* (1), *ed* A, B, C *sono costanti indipendenti da* u *e da* Ω, *dipendenti soltanto da* k. (Queste costanti possono essere numericamente calcolate).

TEOREMA 2. – *Conservando le condizioni* 1° *e* 2° *del* Teorema 1, *poniamo la seguente condizione* 3°′ *in luogo della condizione* 3°:

3°′ *la traccia* $u(\xi_1, \xi_2)$ *della funzione* u *ammetta derivate seconde assolutamente integrabili insieme ai loro quadrati.*

Allora

$$\max_{\Omega+\Sigma}\ \max_{i=1,2,3} |\operatorname{grad} u_i| \leqq A_0(\omega) M_0(u) + A_1(\omega) + M_1(\omega) + \sqrt{\frac{8}{3}}\, A_2(\omega)\, \omega^{1/2} r^{1/2} M_2(u),$$

dove $A_0(\omega)$, $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ *sono le stesse costanti che figurano nel* Teorema 1.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. ADLER, *Maggiorazione del gradiente delle funzioni armoniche mediante i loro valori al contorno*, «Memorie della Accad. Naz. dei Lincei», serie VIII, vol. VI, fasc. 7, pp. 185–201 (1961).

[2] G. ADLER, *Majoration du gradient des solutions de l'équation* $\Delta u - au'_t = f$, «Acta Mathematica Acad. Sci. Hungaricae» (in corso di stampa).

[3] G. ADLER, *Maggiorazione del gradiente delle funzioni del calore*, «Rendiconti della Accad. Naz. dei Lincei», serie VIII, vol. XXX, pp. 357–361 (1961).

[4] G. ADLER, *Maggiorazione del gradiente delle soluzioni delle equazioni* $\Delta u = f$ *e* $\Delta u - au'_t = g$, «Rendiconti della Accad. Naz. dei Lincei», serie VIII, vol. XXX, pp. 673–676 (1961).

[5] G. FICHERA, *Il teorema del massimo modulo per l'equazione dell'elastostatica tridimensionale*, «Archive for Rational Mechanics and Analysis», vol. 7, pp. 373–387 (1961).