Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Delfina Roux

Sulla composizione secondo Hurwitz-Pincherle di due serie di Dirichlet

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.4, p. 364–368.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_4_364_0¿

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulla composizione secondo Hurwitz–Pincherle di due serie di Dirichlet* (*). Nota di DELFINA ROUX, presentata (**) dal Corrisp. G. RICCI.

1. INTRODUZIONE. – Consideriamo due funzioni analitiche della variabile complessa z, $a(z)$ e $b(z)$, definite mediante due serie di potenze in $1/z$; qualora si conosca la collocazione dei loro punti singolari, è ben noto (1) dove debbano essere ricercati i punti singolari della funzione composta secondo Hurwitz–Pincherle (scriveremo secondo H.–P.) di $a(z)$ e $b(z)$. L'analogo problema per le funzioni rappresentate mediante serie di Dirichlet venne affrontato per la prima volta da S. Mandelbrojt [4]. Egli prese in esame una serie di Dirichlet

$$a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty\,;\; s = \sigma + it)$$

(avente ascissa di assoluta convergenza $\sigma_a < +\infty$ e ascissa di olomorfismo (2) $\bar{\sigma}_\alpha < +\infty$) e una serie di Taylor–Dirichlet

$$b(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-ns}$$

(avente ascissa di convergenza $\sigma_b < +\infty$), nell'ipotesi che le funzioni analitiche della variabile complessa s definite da $a(s)$ e $b(s)$ fossero *funzioni uniformi* di s, e pervenne ad un teorema che contiene come caso particolare il teorema di H.–P. soltanto *limitatamente ad una regione di piano.* Precisamente, detto $E(a\,;\sigma_1)$ l'insieme dei *punti non regolari* di $a(s)$ nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > \sigma_1$ (3), il teorema di Mandelbrojt afferma che

« Per la funzione definita mediante la serie

$$h(s) = h(s\,; a\,, b) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\mu_n s} \qquad , \qquad c_n = \binom{\lambda_r + m - 1}{m} a_r b_m$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R. (1962–63).

(**) Nella seduta del 20 aprile 1963.

(1) Si veda ad esempio L. BIEBERBACH [2], pp. 29–31.

(2) Dicesi « ascissa di olomorfismo » di una serie di Dirichlet $a(s)$ l'estremo inferiore dei numeri σ pei quali $a(s)$ è olomorfa nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > \sigma$. Si veda ad esempio VL. BERNSTEIN [1], p. 32.

(3) Questo insieme è così definito da S. Mandelbrojt: $E(a\,;\sigma_1)$ è l'insieme formato dai punti singolari di $a(s)$ nel semipiano $\mathrm{Re}(s) > \sigma_1$ e dai punti che non si trovano su alcuna curva giacente in questo semipiano, passante per un punto in cui $a(s)$ converge e non passante per alcun punto singolare di $a(s)$.

(dove $\mu_n = m + \lambda_r$ e la successione $\{\mu_n\}$ è percorsa in ordine crescente), l'insieme $E(h; \max(\bar{\sigma}_a, \sigma_b))$ non può contenere punti diversi dai punti della forma $\log(e^{\alpha} + e^{\beta})$ e dai loro punti di accumulazione, dove $\alpha \in E(a; -\infty)$ ed al logaritmo vengono attribuite tutte le sue determinazioni ».

Nei riguardi di questo teorema possiamo fare la seguente osservazione. Se $\alpha \in E(a; -\infty)$, il punto $\alpha + 2k\pi i$ (k intero $\neq 0$) non appartiene necessariamente ad $E(a; -\infty)$ (e altrettanto dicasi per $b(s)$); tuttavia l'informazione data sull'insieme $E(h; \max(\bar{\sigma}_a, \sigma_b))$ è indifferente a questo fatto, nel senso che tale insieme rimane invariato sia che, oltre al punto α, appartengano ad $E(a; -\infty)$ anche altri punti della forma $\alpha + 2k\pi i$, sia che non vi appartengano. Ciò fa pensare che il teorema in questione possa essere ulteriormente perfezionato da questo punto di vista.

S. Mandelbrojt [4], [5], e, successivamente, Yu Chia Yung [8], si occuparono della composizione di due serie entrambe di Dirichlet, che definiscano *funzioni uniformi* di s, considerando però una operazione di composizione che si discosta notevolmente dalla originaria composizione secondo H.–P. e, comunque, pervenendo a risultati pei quali vale la stessa osservazione fatta per il teorema citato sopra.

H. G. Eggleston [3] studiò l'analogo problema della composizione secondo H.–P. di due serie di potenze generalizzate, cioè di due serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-(\lambda_n + 1)} \qquad (0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty),$$

dove z è un numero complesso non nullo di modulo e argomento univocamente determinato, come se la variabile z fosse distesa sopra la superficie riemanniana di $\log z$ (o anche di z^{λ} con λ irrazionale): queste serie di potenze generalizzate sono evidentemente un'altra forma delle serie di Dirichlet, forma sotto la quale esse erano state precedentemente studiate da A. Pflüger [6] nei riguardi del loro comportamento asintotico.

Anche per il teorema di Eggleston vale un'osservazione analoga a quella fatta riguardo ai teoremi precedenti. Per questa ragione ed anche perché riteniamo che il teorema di Eggleston non possa sussistere nella forma generale in cui è stato enunciato, abbiamo ripreso in esame, in una Nota in corso di pubblicazione, il problema della collocazione delle singolarità della funzione composta secondo H.–P. di due serie di potenze generalizzate: il teorema cui siamo pervenuti mette in luce l'influenza che, sulle singolarità della funzione composta, ha il fatto che un punto sia singolare per una piuttosto che per un'altra determinazione delle funzioni componenti.

In questa Nota ci proponiamo di presentare i risultati ottenuti enunciandoli qui nella forma abituale per le serie di Dirichlet.

2. ADDIZIONE ESPONENZIALE. STELLA. SOMMA DI STELLE. – Consideriamo il piano della variabile complessa $s = \sigma + it$, privato del punto $s = \infty$, cioè l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (σ, t) $(-\infty < \sigma < +\infty$,

$-\infty < t < +\infty$) e conveniamo, poiché questo ci riuscirà comodo nel seguito, di aggiungere all'insieme di queste coppie quelle il cui primo elemento è $-\infty$ (le coppie $(-\infty, t)$, $-\infty < t < +\infty$).

Stabiliamo ora nell'insieme S di punti così ottenuto una operazione di *addizione esponenziale* nel modo seguente.

Sia $s_k = \sigma_k + it_k$ ($-\infty \leqq \sigma_k < +\infty$, $-\infty < t_k < +\infty$; $k = 1, 2$). Il punto $s = \sigma + it = s_1 \dot{+} s_2$, somma esponenziale di s_1 e s_2, è definito nel modo seguente.

1° se $|t_1 - t_2| > \pi$, *s non esiste.*

Qualora sia $|t_1 - t_2| \leqq \pi$, consideriamo il numero complesso $e^{s_1} + e^{s_2}$ $(e^{-\infty + it} = 0)$;

2° se $|e^{s_1} + e^{s_2}| = 0$, poniamo $\sigma = -\infty$, $t = (t_1 + t_2)/2$;

3° se $|e^{s_1} + e^{s_2}| > 0$, poniamo $s = \log(e^{s_1} + e^{s_2})$, dove la determinazione del logaritmo è scelta in modo che risulti $t_1 \leqq t \leqq t_2$ se $t_1 \leqq t_2$, oppure $t_2 \leqq t \leqq t_1$ se $t_2 \leqq t_1$.

L'operazione di addizione esponenziale è commutativa ma, in generale, non associativa: infatti può esistere $(s_1 \dot{+} s_2) \dot{+} s_3$ senza che esista $s_1 \dot{+} (s_2 \dot{+} s_3)$; tuttavia, qualora entrambe queste somme esistano finite, esse sono uguali.

Siano A e B due insiemi di punti di S: diremo *somma esponenziale* $A \dot{+} B$ dei due insiemi A e B l'insieme dei punti della forma $s = s_1 \dot{+} s_2$, con $s_1 \in A$ e $s_2 \in B$.

Diremo *stella* in S qualunque insieme aperto A che goda le seguenti proprietà: 1° per ogni t, $-\infty < t < +\infty$, esiste $a_t < +\infty$ tale che per ogni $\sigma > a_t$ risulti $s = \sigma + it \in A$; 2° se $s_1 = \sigma_1 + it_1 \in A$, per ogni $\sigma > \sigma_1$ risulta $s = \sigma + it_1 \in A$.

Per ogni t ($-\infty < t < +\infty$), diciamo σ_t l'estremo inferiore dei valori σ tali che $s = \sigma + it \in A$; risulta $-\infty \leqq \sigma_t < +\infty$. Il punto $s_t = \sigma_t + it$ sarà detto *vertice* di A sulla retta $\text{Im}(s) = t$.

Sia $s = \sigma + \text{it}$, $\sigma > -\infty$, un punto della frontiera di A: diremo s *bene accessibile* se esiste un semicerchio di centro s i cui punti interni appartengono tutti ad A.

Diremo *somma* di due stelle A e B l'insieme $A \oplus B$ complementare dell'insieme somma esponenziale dei complementari A' e B' di A e di B, cioè $A \oplus B = (A' \dot{+} B')'$. È facile vedere che la somma di due stelle è anch'essa una stella e che l'operazione di somma di stelle è commutativa ed associativa.

3. I RISULTATI. - Sia $a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ $(0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} < +\infty)$ una serie di Dirichlet avente raggio di assoluta convergenza $\sigma_a < +\infty$ e sia A la sua stella di regolarità (4). È facile vedere che A è una stella del tipo defi-

(4) La stella di regolarità di una serie di Dirichlet è definita nel modo seguente. Per ogni t, $-\infty < t < +\infty$, consideriamo l'insieme A_t dei punti $s = \sigma + it$ $(-\infty < \sigma < +\infty)$ nei quali $a(s)$ è regolare per prolungamento analitico lungo la retta $\text{Im}(s) = t$ a partire da un

nito nel n. 2 e che ogni punto α vertice di A, con $\mathrm{Re}(\alpha) > -\infty$, è necessariamente singolare per $a(s)$ per prolungamento analitico lungo la semiretta $t = \mathrm{Im}(\alpha)$; $\sigma > \mathrm{Re}(\alpha)$.

Sia $\alpha = -\infty + it_\alpha$ un vertice di A: se $\sigma_1 > \sigma_a$, $a(s)$ è funzione olomorfa di s (e quindi anche di $z = e^s$) nell'intorno del punto $s_1 = \sigma_1 + it_\alpha$. Consideriamo la serie di potenze di z che rappresenta $a(s)$ nell'intorno di $s = s_1$; l'elemento analitico considerato è prolungabile lungo il raggio arg $z = t_\alpha$ fino all'origine; se $z = 0$ è singolare per prolungamento analitico lungo questo raggio diremo che il punto α è *singolare* per $a(s)$; in caso contrario diremo che α è *non singolare* per $a(s)$.

Veniamo ora ad enunciare il teorema oggetto di questa Nota.

TEOREMA. - *Siano* $a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n+1)s}$, $b(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-(\mu_n+1)s}$ $(0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty$, $0 < \mu_n < \mu_{n+1} \to +\infty)$ *due serie di Dirichlet aventi ascissa di assoluta convergenza* $\sigma_a < +\infty$, $\sigma_b < +\infty$ *e siano* A *e* B, *rispettivamente, le stelle di regolarità di* $a(s)$ *e di* $b(s)$; $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$, *rispettivamente, gli insiemi dei punti singolari di* $a(s)$ *e di* $b(s)$ *sulla frontiera di* A *e* B. *Allora, per la funzione definita mediante la serie* (5)

$$h(s) = h(s\,;a\,,b) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{m,n}\, e^{-(\lambda_m+\mu_n+1)s} \,, \quad c_{m,n} = \frac{\Gamma(\lambda_m+\mu_n+1)}{\Gamma(\lambda_m+1)\,\Gamma(\mu_n+1)}\, a_m b_n$$

valgono le seguenti proprietà:

1° *detta* H *la stella di regolarità di* $h(s)$, *risulta* $\mathrm{H} \supseteq \mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$;

2° *fra i vertici al finito e i punti bene accessibili della frontiera di* $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$ *possono essere singolari per* $h(s)$ *soltanto quelli che appartengono ad* $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$;

3° *un vertice di* $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$ *della forma* $s = -\infty + it_0$ *può essere singolare per* $h(s)$ *soltanto se esiste un punto* $s = -\infty + it$, *con* $|t - t_0| < \pi/2$ *appartenente ad* $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ (6).

Questo teorema si ricava come immediato corollario dall'analogo teorema sulla composizione secondo H.–P. delle serie di potenze generalizzate contenuto nel lavoro in corso di pubblicazione al quale ci siamo riferiti in precedenza.

In maniera analoga a quella usata per le serie di potenze generalizzate, tenendo presenti i teoremi di R. Wilson [7] sulla composizione secondo H.–P. di poli e singolarità essenziali, si perviene al seguente

punto $s_1 = \sigma_1 + it$ $(\sigma_1 > \sigma_a)$: è evidente che A_t non dipende dal particolare punto s_1 prescelto. La stella di regolarità di $a(s)$ è l'insieme A riunione degli insiemi A_t, cioè $A = \bigcup_{-\infty<t<+\infty} A_t$. Si veda per esempio V. BERNSTEIN [1], p. 184.

(5) Questa serie converge assolutamente almeno per $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a + \sigma_b$ (vedasi H. G. EGGLESTON [3]).

(6) L'informazione contenuta in 3° può essere utile quando si debba procedere alla composizione secondo H.–P. di più serie di Dirichlet.

COROLLARIO. – *Sia* γ *un vertice al finito* ($\mathrm{Re}(\gamma) > -\infty$) *o un punto bene accessibile della frontiera di* $A \oplus B$, *rappresentabile in un sol modo nella forma* $\alpha \dotplus \beta$, *con* $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{B}$; *inoltre i punti* α *e* β *siano poli o singolarità essenziali, rispettivamente, per* $a(s)$ *e per* $b(s)$. *Allora* γ *è necessariamente singolare per* $h(s)$ *ed inoltre*

1° *se* α *e* β *sono poli, rispettivamente, di ordine* m *e* n, γ *è un polo di ordine* $m + n - 1$ *per* $h(s)$;

2° *se almeno uno dei punti* α, β *è singolare essenziale,* γ *è singolare essenziale per* $h(s)$ *ed ha ordine uguale al massimo fra gli ordini dei punti singolari* α *e* β.

BIBLIOGRAFIA.

[1] V. BERNSTEIN, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Paris 1933.

[2] L. BIEBERBACH, *Analytische Fortsetzung*, Berlin 1955.

[3] H. G. EGGLESTON, *A generalization of the Hurwitz composition theorem to irregular power series*, « Proc. Cambridge Philos. Soc. », *47*, pp. 477–482 (1951).

[4] S. MANDELBROJT, *Contribution à la théorie du prolongement analytique des séries de Dirichlet*, « Acta Math. », *55*, pp. 1–32 (1930).

[5] S. MANDELBROJT, *Dirichlet Series*, « Rice Institute Pamphlet », *31*, pp. 261–271 (1944).

[6] A. PFLÜGER, *Ueber eine interpretation gewisser Konvergenz–und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen*, « Comment. Math. Helv. », *8*, pp. 3–43 (1935–36).

[7] R. WILSON, *Some applications of the Hurwitz–Pincherle composition theory*, « J. London Math. Soc. », *28*, pp. 484–490 (1953).

[8] YU CHIA–YUNG, *Theorèmes de composition des séries de Dirichlet*, « Bull. Sci. Math. » (2), *75*, pp. 69–80 (1951).