Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulio Supino

Propagazioni ondose nei canali a marea. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.4, p. 345–351.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_4_345_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Idrodinamica. — *Propagazioni ondose nei canali a marea.* Nota II [(*)] del Corrisp. GIULIO SUPINO.

1. Nella Nota I ho indicato i due problemi fondamentali della propagazione ondosa nei canali a marea ed ho discusso il caso delle onde ascendenti libere. Consideriamo qui il secondo problema prospettato.

Sia dato un canale alimentato con portata costante e che abbia la foce chiusa da porte vinciane: finché il livello dell'acqua nel canale è inferiore al livello del mare le porte restano aperte; quando la marea cresce le porte si chiudono e l'acqua si invasa nel canale.

2. Precisiamo il problema matematico.

Come prima cosa sostituiremo le porte vinciane con paratoie piane; ciò per evitare di dover tener conto della inclinazione delle due porte rispetto all'asse del canale e di dover risolvere, insieme al problema della marea quello delle riflessioni ondose. Ciò semplificherà la soluzione e porterà a qualche differenza soltanto nelle vicinanze delle porte.

Chiuse le paratoie, al moto uniforme di base si sovrappone una portata uguale ed opposta che ha origine per $x = 0$. La soluzione generale, nell'ipotesi che il canale si estenda sufficientemente a monte (in modo che non compaiano le onde riflesse durante il periodo di chiusura delle paratoie) è data, ovviamente, dalle sole onde ascendenti; si può perciò rappresentare la φ con una serie di onde sinusoidali elementari e scrivere

$$\varphi = \Sigma \mathrm{A}_n e^{\lambda_n x} \operatorname{sen} n\nu \left(t - \frac{x}{\omega_n}\right) + \Sigma \mathrm{B}_n e^{\lambda_n x} \cos n\nu \left(t - \frac{x}{\omega_n}\right).$$

Si avrà quindi:

$$q = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\Sigma n\nu \mathrm{A}_n e^{\lambda_n x} \cos n\nu \left(t - \frac{x}{\omega_n}\right) + \Sigma n\nu \mathrm{B}_n e^{\lambda_n x} \operatorname{sen} n\nu \left(t - \frac{x}{\omega_n}\right)$$

$$y = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \Sigma \mathrm{A}_n \lambda_n e^{\lambda_n x} \operatorname{sen} n\nu \left(t - \frac{x}{\omega_n}\right) - \Sigma \frac{n\nu}{\omega_n} \mathrm{A}_n e^{\lambda_n x} \cos n\nu \left(t - \frac{x}{\omega_n}\right) +$$

$$+ \Sigma \mathrm{B}_n \lambda_n e^{\lambda_n x} \cos n\nu \left(t - \frac{x}{\omega_n}\right) + \Sigma \frac{n\nu}{\omega_n} \mathrm{B}_n e^{\lambda_n x} \operatorname{sen} n\nu \left(t - \frac{x}{\omega_n}\right).$$

Le porte restino chiuse per il tempo t_0. In questo tempo tutto va come se dalle paratoie fosse stata inviata verso monte una portata uguale ed opposta alla portata affluente: $q = -q_0$; successivamente le porte si riapriranno e, non crescendo più il livello in corrispondenza di esse, q si annullerà improvvisamente per poi assumere un valore positivo aumentando la portata defluente

(*) Presentata nella seduta del 9 marzo 1963.

in modo da annullare completamente l'effetto di ritenuta manifestatosi nell'intervallo $O - t_0$.

Nell'intervallo successivo a t_0 e fino al termine del periodo (cioè al ritorno della marea al livello medio) la legge delle portate resta incognita; è invece nota la y (uguale alla y della marea).

La soluzione esatta richiederebbe perciò la soluzione di un problema misto ai limiti. Ma il problema può essere semplificato partendo dall'ipotesi che per $t = O$ il moto nel canale sia in ogni caso un moto uniforme e limitandosi a ricercare l'andamento delle onde finché le porte restano chiuse (e cioè quando l'onda è più alta). Con queste ipotesi le condizioni sono ben determinate fino a $t = t_0$; successivamente noi non conosciamo la legge con la quale q varia dopo l'apertura delle porte, ma tale legge non può avere influenza su quanto accade nel tempo $O - t_0$ perché se essa influenzasse la ritenuta dovremmo concludere che la propagazione dell'onda verso monte è influenzata da quello che accade a valle *in tempo successivo*. Ciò che è evidentemente assurdo.

Supponiamo perciò che la portata $\bar{q}$ da aggiungere alla portata di moto uniforme sia $-q_0$ nel periodo $O - t_0$ e $+q_0$ nel periodo $t_0 - 2\,t_0$. Poniamo poi $2\,t_0 = T$ (essendo T un tempo convenzionale, non necessariamente eguale alla durata di un periodo completo di marea).

In base alla soluzione assegnata per φ si ha alla foce

$$\bar{q} = -q = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Sigma n\nu\, A_n \cos n\nu t - \Sigma n\nu\, B_n \operatorname{sen} n\nu t$$

mentre per lo sviluppo in serie di Fourier è

$$\bar{q} = \frac{2\,q_0}{\pi}\,\frac{1 - \cos n\pi}{n} \operatorname{sen} n\nu t .$$

Di qui risulta

$$A_n = 0 \quad , \quad B_n = -\frac{q_0\,T}{\pi^2}\,\frac{1 - \cos n\pi}{n^2} .$$

In corrispondenza di questa soluzione si ha per y (alla foce):

$$y = y_1 + y_2$$

con

$$y_1 = -\frac{q_0\,T}{\pi^2}\,\frac{1 - \cos n\pi}{n^2}\,\lambda_n \cos n\nu t$$

$$y_2 = -\frac{2\,q_0}{\pi}\,\frac{1 - \cos n\pi}{n\omega_n} \operatorname{sen} n\nu t .$$

Si osservi a questo punto che se λ_n fosse costante (e uguale a λ) si potrebbe scrivere

$$y_1 = \lambda \int s\, dt$$

essendo

$$s = \frac{2q_0}{\pi} \Sigma \frac{1 - \cos n\pi}{n} \operatorname{sen} n\nu t$$

e quindi s uguale a q_0 tra O e t_0 e uguale a $-q_0$ tra t_0 e $2\,t_0$ (con la condizione che la costante di integrazione sia nulla). Analogamente se fosse $\omega_n = \text{cost}$ $(= \omega)$ sarebbe

$$y_2 = -\frac{1}{\omega} s\,.$$

Ora λ ed ω non sono costanti ma ammettono limite al crescere di n, come è facile controllare.

Tale limite vale

$$X_l = \frac{i_f}{(1 - F)\, Y_0 \sqrt{F}} \sqrt{\frac{(4 - F)(1 - F)}{4} + \frac{9}{4} F}$$

e quando, come accade di solito, F sia molto piccolo si può scrivere

$$X_l = \frac{i_f}{Y_0 \sqrt{F}} (1 + 1{,}125\ F)$$

da cui segue

$$\lambda_l = \frac{i_f}{Y_0 \sqrt{F}} (1 + 1{,}5 \sqrt{F} + 1{,}125\ F)$$

$\omega_l = -\dfrac{1}{\sqrt{F}} U_0$ (col segno — perchè la propagazione avviene verso monte).

Se ne deduce, intanto, in base ad un noto teorema su le serie che y_1 e y_2 sono rappresentati da serie convergenti. E a noi interessa conoscere la loro somma in corrispondenza del tempo t_0, quando le porte stanno per riaprirsi. Ora per $t = t_0$ è certamente $y_2 = 0$ in quanto tutti i termini sono nulli (si ha a fattore sen $n\Pi$). Ma ciò è dovuto al fenomeno di Gibbs, ben noto nelle serie trigonometriche, e per il quale in un punto di discontinuità per la funzione la serie assume il valore medio tra il limite a destra e quello a sinistra (e nel caso attuale il valore zero). Poiché la forma delle funzioni a partire da $t = t_0$ è stata fissata arbitrariamente così non si può tener conto di questo risultato. Si può peraltro sfruttare la forma della serie y_2 per trovarne la somma in corrispondenza di $t = t_0 - \varepsilon$. Si è già osservato che se ω fosse costante sarebbe $y_2 = \dfrac{-1}{\omega} s$. Effettivamente ω non è costante, ma tende ad un limite ω_l al crescere di n e per n sufficientemente grande differisce dal limite assai poco quanto si vuole. Ora noi possiamo scegliere n ed ε in modo tale che i primi $\bar{n}$ termini della serie siano trascurabili. I successivi termini sono evidentemente crescenti ma qui è ormai $\omega \approx \omega_l$. La somma della serie (per $t = t_0 - \varepsilon$) è dunque effettivamente

$$y_2 = -\frac{1}{\omega_l} s = -\frac{1}{\omega_l} q_0\,.$$

Resta da calcolare y_1 e questo calcolo può essere effettuato direttamente dato che la serie è uniformemente e assolutamente convergente. Ma si opera più rapidamente valutando il limite λ_l di λ_n per n molto grande e scrivendo

$$y_1 = \lambda_l \int s\,dt - \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_l - \lambda_n) \frac{q_0 T}{\pi^2} \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} .$$

Il primo termine per $t = t_0$ vale $\lambda_l \frac{q_0 t_0}{2}$ mentre la seconda serie si calcola abbastanza rapidamente dato che la differenza $\lambda_l - \lambda_n$ è anch'essa rapidamente decrescente.

Alla fine del tempo t_0 possiamo quindi scrivere

$$y_1(t_0) + y_2 = f(t_0) \tag{6}$$

dove $f(t_0)$ rappresenta l'andamento della marea in mare. Questa equazione permette di determinare t_0 perché le porte si riaprono (durante la fase discendente della marea) quando $y_1 + y_2$ hanno raggiunto $f(t_0)$.

Sulla determinazione di t_0 deve però essere fatta una osservazione. A rigore t_0 dovrebbe essere noto a priori perché noi introduciamo t_0 in $\nu = \pi/t_0$. In pratica potremo dare una valutazione approssimata di t_0 per determinare ν; poi t_0 sarà determinato esattamente in base alla (6). E così controlleremo se ν è valutato con sufficiente precisione ed eventualmente ripeteremo i calcoli. I quali sono facilitati dal fatto che, come abbiamo visto, λ e ω sono, al limite per $n \to \infty$, indipendenti da ν.

3. Svolgiamo un esempio. Sia dato un canale rettangolare molto largo con le sponde e il fondo coperti da vegetazione (sicché nella formula di Bazin è $\gamma = 2{,}30$). La profondità di moto uniforme sia $Y_0 = 2$ m, la pendenza del fondo sia $i_f = 0{,}000025$ (2,5 cm per km).

La portata per unità di larghezza risulta allora

$$q_0 = C Y_0 \sqrt{Y_0 i_f}$$

ed essendo

$$C = \frac{87\sqrt{Y_0}}{Y_0 + \gamma} = 33{,}12 \quad , \quad \sqrt{Y_0} = 1{,}414 \quad , \quad \sqrt{i_f} = 0{,}005$$

così segue

$$q_0 = 0{,}468 \qquad U_0 = 0{,}234 \text{ m/sec.}$$

Consideriamo ora la marea alla foce. La marea ha in mare aperto un periodo di $12^h 25' 15''$, ma in corrispondenza delle rive (e specie in fondo ai golfi) la marea può essere esaltata dal vento e possono sovrapporsi anche due onde distinte. Per esempio la marea verificatasi effettivamente alla Sacca degli

Scardovari (nel Delta Padano) il 10 novembre 1957 ha avuto l'andamento indicato dalla seguente tabella:

Ora	$7^h,30'$	9	12	13,30	15	16,30	18
Livello di marea	10	10,80	11,25	11,15	11,0	10,65	10

La quota 10 corrisponde al livello medio del mare.

Prima di poter iniziare i calcoli del moto ondoso occorre prevedere il valore di t_o.

Per avere un'idea della durata di chiusura delle porte, supponiamo che durante il tempo t_o il pelo libero del canale si ponga orizzontale. Il livello si alzerà per effetto dell'affusso q_o. Se alla foce il livello raggiunge la quota 0,80, allora il volume invasabile è $V = (1/2)\ 0{,}80 \times 1 \times 32.000$ (perché occorrono 32 km per raggiungere la quota 10,80 con pendenza 0,000025). Segue $V = 12.800$ mc e con la portata di 0,468 mc/sec si riempie in 27.350 sec. Tale durata è inferiore a 8 ore e pertanto la quota 10,80 dovrebbe essere superata.

Tenuto conto che il pelo libero non si dispone effettivamente orizzontale, si può supporre $t_o = 28.000$ sec (cioè esattamente 8 ore).

Ed ecco ora i calcoli.

Se $t_o = 8$ ore è $V = \frac{\pi}{t_o} = 0{,}00011$; è poi $F = i_{f/i_c} = 0{,}0027$.

Per quello che riguarda λ ed ω valgono i valori della seguente tabella

n =	1	3	5	7	9	11	13	15
$10^5\lambda$ =	9,47	14,25	17,03	18,95	20,32	21,35	22,14	22,75
$-\omega/U_o$ =	+ 5,93	+ 9,60	11,70	13,12	14,13	14,89	15,47	15,92

Al limite per $n \to \infty$ si trova

$$\omega_l = -16{,}70\, U_o$$

$$\lambda_l = 25{,}69 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Segue eseguendo i calcoli nel modo indicato nei numeri precedenti

$$y_1 + y_2 = 0{,}000025\ t_o + 0{,}120\ \mathrm{m}$$

e per $t_o = 28.800$

$$y_1 + y_2 = 0{,}720 + 0{,}120 = 0{,}840\ \mathrm{m}.$$

Invece alle $15^h,30'$ la marea avrà il livello 10,883 m cioè 4,3 cm più alto che nel canale. Perciò dopo 8 ore le porte saranno ancora chiuse; interpolando linearmente si trova che esse si apriranno una diecina di minuti primi dopo le $15^h,30'$ (1). Non si ritiene perciò necessario di rifare i calcoli.

Si osserverà che nell'ipotesi di pelo libero orizzontale il calcolo del periodo in cui le porte restano chiuse sarebbe immediato ed elementare. Rilevato infatti dalle tabelle di marea che per avere un vantaggio nella costruzione delle

(1) Infatti la marea sarà 10,844 alle $15^h,40$.

porte si dovrebbe avere un livello inferiore ad 11 calcoleremo il volume che deve essere invasato nell'ipotesi di $t_0 = 7^h,30' - 8^h - 9^h$. Essendo $q_0 = 0,468$ mc/sec risulta

$$
\begin{aligned}
\text{per } t_0 &= 27.000 \text{ sec} & V &= 12.636 \text{ mc} \\
t_0 &= 28.800 \text{ sec} & V &= 13.478 \text{ mc} \\
t_0 &= 32.400 \text{ sec} & V &= 15.163 \text{ mc}
\end{aligned}
$$

D'altra parte la marea esterna ha modificato il livello secondo la legge seguente

$$
\begin{aligned}
y &= 1 \text{ m} & \text{per } t_0 &= 27.000 \text{ sec} \\
&\ 0,883 & t_0 &= 28.800 \text{ »} \\
&\ 0,828 & t_0 &= 29.700 \text{ »}
\end{aligned}
$$

A quest'ultimo valore di t_0 corrisponde (con $q_0 = 0,468$) un invaso necessario di 13.900 mc (con quota interna leggermente superiore a 0,83). Conviene quindi che esaminiamo l'intervallo 0,83–0,84. Per $t_0 = 29.850$ sec risulta all'esterno $y = 0,836$ e all'interno un invaso di 13.978 mc che consente un periodo di chiusura t_0 pari a 29.868. È inutile proseguire dato il carattere approssimato del calcolo. Si può affermare che con pelo libero orizzontale le porte si sarebbero aperte con la quota 10.835 (mentre con il moto ondoso si è ottenuto circa 10.845).

4. Determiniamo la linea dei colmi d'onda all'interno del canale. Questa risulta senz'altro dalla espressione di $y_1 + y_2$ in funzione della x. Si ha cioè

$$y_1 = -\frac{q_0 T}{2} \Sigma \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} \lambda_n e^{\lambda_n x} \cos n\nu t$$

(da calcolarsi per $t = t_0$)

$$y_2 = -\frac{2 q_0}{\pi} \frac{1 - \cos n\pi}{n\omega_n} e^{\lambda_n x} \operatorname{sen} n\nu t$$

(da calcolarsi per $t = t_0 - \varepsilon$).

Nel caso dell'esempio precedentemente svolto si trova

	alla foce	a 10 km	a 20 km	a 30 km
Valori di y (dedotti dalla teoria ondosa)	10,854	10,496	10,587	10,783
Pelo libero orizzontale	10,835	10,835	10,835	10,835

con una leggera maggiore altezza alla foce (rispetto all'ipotesi di pelo libero orizzontale) e una sensibile minore altezza all'interno del canale.

5. Possiamo ora concludere. Il livello dei colmi d'onda in un canale a marea, munito di porte vinciane si dispone alla foce in modo leggermente superiore a quello che si stabilirebbe facendo il compenso tra la portata affluita

nel tempo di chiusura delle porte e volume invasato nel canale nell'ipotesi di pelo orizzontale. Nell'interno del canale invece tale livello risulta inferiore al livello orizzontale.

Da questa constatazione si deduce che se si aumenta la pendenza pur rimanendo invariata la portata (per effetto per esempio di un aumento delle resistenze) allora diminuisce l'invaso nel canale e si riduce (o addirittura si annulla) l'efficacia delle porte. Lo stesso accade se pur restando invariata la pendenza cresce la portata per unità di larghezza (il che può avvenire se le resistenze diminuiscono).

Infine se le porte restassero chiuse soltanto per il tempo necessario a passare dal livello medio alla massima alta marea e qui si aprissero, allora non si avrebbe alcun vantaggio nel livello dell'acqua alla foce, ma un certo vantaggio si noterebbe ancora nel canale verso monte perché il pelo libero resterebbe compreso tra l'orizzontale e la retta del pelo uniforme, mentre nel caso di assenza di porte si disporrebbe poco al disotto del profilo di rigurgito.

Tuttavia può accadere che le porte non si chiudano affatto. La constatazione potrà essere fatta facilmente confrontando il diagramma di marea con l'andamento della y a porte chiuse e controllando che sempre è $y > f(t)$, ma non può essere ottenuto un risultato valido in generale data la irregolarità della curva di marea.