Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulio Krall, Domenico Caligo

Ha influenza la flessione sul λ_{cr} critico di una volta cilindrica?

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.4, p. 340–344.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_4_340_0¿

Meccanica. — *Ha influenza la flessione sul λ_{cr} critico di una volta cilindrica?* Nota di GIULIO KRALL e DOMENICO CALIGO, presentata [*] dal Socio G. KRALL.

Si vuol far qui vedere che, in campo elastico, per un'asta, per un arco nel proprio piano, per una volta cilindrica generica, in particolare autoportante, la sovrapposizione di uno stato flessionale non ha influenza sul moltiplicatore λ_{cr} di un regime estensionale di equilibrio.

Tale risultato, che si potrebbe dire negativo, non è però del tutto privo di interesse perché toglie ogni dubbio che, più o meno leggermente, può venir fatto di sollevare [1] sulla validità di tutta una serie di risultati desunti per questi sistemi, elementari e fondamentali, appunto omettendo la considerazione di stati flessionali che inevitabilmente possono accompagnarsi ai regimi tensionali puri, ai quali usualmente si fa riferimento.

Richiamandoci a recenti Note su questi « Rendiconti » [2] la dimostrazione di quanto si afferma si riconduce, secondo il criterio di stabilità del Dirichlet, a verificare che il lavoro del 2° ordine $\mathfrak{L}_{2,M}$ fatto dai momenti dello stato flessionale (proporzionale ai carichi) che si mette in causa, e che tacitamente non è ivi considerato, è rigorosamente nullo, per deformazioni prive di estensione, che sono poi quelle che rendono minimo il λ_{cr}, ed in ogni caso trascurabile, portando a variazioni del λ_{cr} dell'ordine di h/R, compreso, anche per volte in cemento armato, nell'intervallo $0{,}003 \leq \frac{h}{R} \leq 0{,}007$.

L'annullarsi di $\mathfrak{L}_{2,M}$ è garantito dall'annullarsi delle componenti del secondo ordine $\varkappa_1^{(2)}, \varkappa_{12}^{(2)}, \varkappa_2^{(2)}$ delle caratteristiche della deformazione flessionale $\varkappa_1, \varkappa_{12}, \varkappa_2$ corrispondenti alla deformazione v, w di una linea con configurazione di equilibrio nel suo piano Π o alla deformazione u, v, w di una superficie cilindrica.

Poiché le $\varkappa^{(2)}$ non risultano note, essendo sino ad ora bastate le componenti del prim'ordine $\varkappa_1^{(1)}, \varkappa_{12}^{(1)}, \varkappa_2^{(1)}$, qui si mira innanzi tutto a determinare queste.

Merita rilevare subito, a scanso di ambiguità, che le $\varkappa$, anche se sono chiamate dal Love (e quindi da tutti, attesa l'universalità del trattato [3]) *change of curvature*, in verità non rappresentano [4] la variazione di curva-

(*) Nella seduta del 20 aprile 1963.

(1) Cfr. ad esempio, « Mathematical Review », vol. 24, n. 4 B (ottobre 1962) p. 208, n. B–1365 di P. P. Teodorescu.

(2) G. KRALL e D. CALIGO, *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti*, Note I–V in questi « Rend. », ser. VIII, vol. XXX, 131–139, 315–322, 421–428, 608–617 e vol. XXXI, 9–16 (1961); in particolare Nota III, § 2.

(3) A. E. H. LOVE, *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (The University Press, Cambridge 1952), pp. 524 e 543.

(4) G. KRALL, *Stabilità trasversale degli archi da ponte*, « Memorie fisiche Acc. Lincei », vol. VI, 381–412 (1962).

tura della linea o superficie per v, w o u, v, w bensì *la variazione angolare specifica riferita al ds originario*, anziché a quello variato ds', o meglio le *caratteristiche di deformazione*. Ciò risulta anche da una importante Nota [5] del prof. G. Ferrarese dove si deducono classicamente, utilissime in quest'ordine di problemi, le caratteristiche di deformazione e la variazione di curvatura di un solido tubolare a quattro parametri. Questa Nota è il preludio della corrispondente trattazione per una superficie qualsiasi.

Sicché, mentre per una linea piana C_0 variata in una C con spostamenti v, w secondo la tangente $\vec{t}$ e la normale interna $\vec{n}$ la variazione di curvatura k è espressa con ovvi simboli da

$$k = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{d\psi'}{ds'} - \frac{d\psi}{ds}, \tag{1}$$

la caratteristica $\varkappa$, sin qui chiamata *change of curvature*, è invece espressa da

$$\varkappa = \frac{d\psi' - d\psi}{ds}. \tag{2}$$

Sia la linea piana C_0 data nella forma:

$$R = R(\psi), \tag{3}$$

dove ψ è l'angolo che la normale $\vec{n}$ (nel punto generico P di C_0) forma con una direzione fissa assegnata arbitrariamente a priori (la normale in un punto, il vertice ad esempio) ed R è il raggio di curvatura di C_0 nel punto P. Siano, altresì, assegnati gli spostamenti v, w in funzione di ψ; si trova per la parte di prim'ordine $\varkappa_2^{(1)}$:

$$\boxed{\varkappa_2^{(1)} = \frac{1}{R}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{R}\frac{dw}{d\psi} + \frac{v}{R}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R}\right)} \tag{$2^{(1)}$}$$ [6]

e per la parte di second'ordine $\varkappa_2^{(2)}$:

$$\boxed{\varkappa_2^{(2)} = -\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R}\right) \cdot e_2^{(1)}\right]} \tag{$2^{(2)}$}$$

essendo $e_2^{(1)}$ la componente del prim'ordine della deformazione e_2 data da

$$e_2^{(1)} = \frac{1}{R}\left(\frac{dv}{d\psi} - w\right) = \frac{dv}{ds} - \frac{w}{R}. \tag{$3^{(1)}$}$$

All'espressione ($2^{(2)}$) di $\varkappa_2^{(2)}$ si perviene in vario modo. Ad esempio osservando che

$$d\psi' = d\psi + d\left[\left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R}\right) : (1 + e^{(1)})\right],$$

(5) G. FERRARESE, *Sulle caratteristiche di deformazione di una barra curva*, nel fascicolo di giugno di questi Rendiconti.

(6) L'indice deponente 2 essendo attribuito, con riguardo ad una superficie cilindrica, alle direttrici; l'indice 1 alle generatrici (cfr. Nota III cit. [2]); mentre nella Memoria cit [4], considerandosi solo linee piane, per $\varkappa_2$ si scrive $\varkappa_\psi$ o $\varkappa_w$.

sicché

$$\frac{d\psi'-d\psi}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds}+\frac{v}{R}\right)-\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{dw}{ds}+\frac{v}{R}\right)\cdot e^{(1)}\right]+\cdots.$$

Con ciò appare esplicito il termine del primo ordine $\varkappa_2^{(1)}$ del Love [7] e quello di second'ordine $\varkappa_2^{(2)}$ qui assegnato in $(2^{(2)})$.

Merita rilevare subito che per la variazione di curvatura (1) si ha invece:

$$k=\frac{d\psi'\dfrac{ds}{ds'}-d\psi}{ds};$$

e da qui, tenuto presente che

$$ds'=(1+e)\,ds=(1+e^{(1)}+e^{(2)}+\cdots)\,ds$$

e che per la componente $e^{(2)}$ del secondo ordine della deformazione e si ha l'espressione (cfr. formola (10) in Note cit. [2], ove si ponga $u=0$, perché qui si tratta di flessione pura nel piano $v\,,w$)

$$(3^{(2)})\qquad e_2^{(2)}=\frac{1}{2R^2}\left(\frac{dw}{d\psi}+v\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{ds}+\frac{v}{R}\right)^2,$$

segue, apponendo l'indice deponente $_2$ alla k della (1),

$$(4)\qquad \boxed{\begin{aligned} k_2 &= k_2^{(1)}+k_2^{(2)}+\cdots,\\ k_2^{(1)} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds}+\frac{v}{R}\right)-\frac{e_2^{(1)}}{R},\\ k_2^{(2)} &= -\left\{\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{dw}{ds}+\frac{v}{R}\right)e_2^{(1)}\right]+e_2^{(1)}\frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds}+\frac{v}{R}\right)+\frac{e_2^{(2)}-(e_2^{(1)})^2}{R}\right\}\end{aligned}}\,.$$

Perciò, per una $v\,,w$ generale, assumendo la $(3^{(1)})$ per $e_2^{(1)}$, risulta

$$(4^{(1)})\qquad k_2^{(1)}=\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{w}{R^2}+v\,\frac{d\,{}^1/R}{ds};$$

assumendo la $(3^{(2)})$ per $e_2^{(2)}$, risulta, utile per un controllo che segue,

$$(4^{(2)})\qquad \begin{aligned} k_2^{(2)}=&-\frac{d^2v}{ds^2}\,\frac{dw}{ds}-2\,\frac{dv}{ds}\,\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{2w^2-v^2}{2R^3}-\\ &-\frac{1}{2R}\left[2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+2v\,\frac{d^2v}{ds^2}-\left(\frac{dw}{ds}\right)^2-4w\,\frac{d^2w}{ds^2}\right]+\\ &+\left[w\,\frac{dw}{ds}-2v\,\frac{dv}{ds}+3\,\frac{vw}{R}\right]\frac{d\,{}^1/R}{ds}\,.\end{aligned}$$

Si noti che la $k_2^{(1)}$ generale, ma con $R=$ costante, si identifica con la $\varkappa_2^{(1)}$ non estensionale ($(2^{(1)})'$ di (7)) e viceversa. Vale la pena di osservare pure che, sempre nel caso non estensionale, la $k_2^{(2)}$ si riduce a

$$\boxed{k_2^{(2)}=-\,e_2^{(2)}/R}\,.$$

(7) $k_2^{(1)}$ della (4) è valido per una deformazione $v\,,w$ generale. Questa per una $v\,,w$ non estensionale (quindi tale che $e_2^{(1)}$ risulta nullo) e per R costante diviene

$$(2^{(1)})'\qquad \varkappa_2^{(1)}=\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{w}{R^2}\,.$$

Le $(4^{(1)})$, $(4^{(2)})$ (e le $(2^{(1)})$, $(2^{(2)})$) coincidono con le espressioni che si ottengono dalle (27) di G. Ferrarese, stabilite nella massima generalità in Nota cit. [5]: basta porvi $\tau = 0$, $u = 0$ e aver presenti le posizioni (9) della medesima per ottenere le (30) e (31), della stessa [5], che sono una diversa maniera di scrivere le nostre (4) [8].

Non insisteremo su queste osservazioni, non certo prive di interesse; ma per evitare qualche incertezza, che può essere provocata dalla locuzione ormai corrente di *change of curvature* per ciò che è invece la *caratteristica di deformazione*, osserviamo ancora che per una volta cilindrica si ha [9]

$$(2^{(1)})^* \quad \varkappa_2^{(1)} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R}\right) \quad , \quad \varkappa_{12}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R}\right) \quad , \quad \varkappa_1^{(1)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

e, per $e_1^{(1)} = u' = 0$,

$$(2^{(2)})^* \quad \varkappa_2^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R}\right)\cdot e_2^{(1)}\right] \; , \; \varkappa_{12}^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R}\right)\cdot e_2^{(1)}\right] \; , \; \varkappa_1^{(2)} = 0 .$$

Evidentemente per l'asta, per l'arco, per la volta cilindrica tutte le deformazioni prive di estensione (nel senso che è anche $e_2^{(1)} = 0$), che sono quelle che interessano per il calcolo del λ_{cr}, *annullano* le $\varkappa_2^{(2)}$, $\varkappa_{12}^{(2)}$, $\varkappa_1^{(2)}$, quindi $\mathfrak{L}_{2,M}$; sicché resta effettivamente provato quanto si è affermato per virtù delle molto significative e riquadrate espressioni di $\varkappa$ e k.

Caso delle deformazioni estensionali.

Merita rilevare che, anche per queste, se non proprio nullo, l'$\mathfrak{L}_{2M}$ risulta trascurabile in rapporto all'$\mathfrak{L}_2$ dello stato tensionale che si chiamerà qui, con riguardo allo sforzo assiale N, per uniformità di notazione, $\mathfrak{L}_{2,N}$.

Con riguardo ad un arco di spessore h e di raggio R si ha ad esempio per i possibili, anzi quasi impossibili, valori di M:

$$(5) \qquad \mathfrak{L}_{2,M} : \mathfrak{L}_{2,N} \sim h : R$$

e poiché $h : R$ è, al più, dell'ordine del $1/100$, $\mathfrak{L}_{2,M}$ è senz'altro trascurabile di fronte ad $\mathfrak{L}_{2,N}$.

(8) Alle (4) si può pervenire facilmente anche partendo dalle equazioni parametriche $x = x(s)$, $y = y(s)$ della curva piana C_0 e utilizzando le equazioni parametriche della curva deformata

$$x' = x(s) - w\frac{dy}{ds} + v\frac{dx}{ds} \quad , \quad y' = y(s) + w\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} .$$

Ad esempio per R = costante si ottiene (limitandosi ai termini di 1° e 2° ordine):

$$\left(\frac{1}{R'}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 \Bigg\{ 1 + 2R\left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2}\right) + 6\left(\frac{dv}{ds} - \frac{w}{R}\right)^2 - \left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R}\right)^2$$
$$- 2R\left[2\left(\frac{dv}{ds} - \frac{w}{R}\right)\left(\frac{d^2 w}{ds^2} + 2\frac{1}{R}\frac{dv}{ds} - \frac{w}{R^2}\right) + \left(\frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{1}{R}\frac{dw}{ds}\right)\left(\frac{dw}{ds} + \frac{v}{R}\right)\right]$$
$$+ R^2\left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2}\right)^2 \Bigg\}$$

con la quale, sempre trascurando termini d'ordine superiore al secondo, si calcola $k = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R}$ e si constata l'accordo con le (4).

(9) Le $(2^{(1)})^*$ sono riportate in Nota III cit. [2].

La (5) si prova osservando che nell'espressione di $\mathfrak{L}_{2,\mathrm{M}}$ interviene ovviamente un fattore M/R, nell'espressione di $\mathfrak{L}_{2,\mathrm{N}}$ invece un fattore N che moltiplicano termini dello stesso ordine. Ora, poiché i valori di M sono sempre dell'ordine di $\mathrm{N}\cdot\varepsilon$ con $\varepsilon < h$, e ciò con largo margine [10]:

$$\mathfrak{L}_{2,\mathrm{M}} : \mathfrak{L}_{2,\mathrm{N}} \sim \varepsilon : \mathrm{R} < h : \mathrm{R} .$$

Perché occorre conoscere comunque il regime flessionale nella valutazione del λ_{cr}.

Si è visto nella Nota V cit. [2] che il superamento del limite di proporzionalità σ_p, facilitato tanto fortemente dalla eccentricità ε dello sforzo assiale N, (eccentricità susseguente a momenti flessionali M) abbassa il modulo di elasticità E e quindi il λ_{cr}, e tanto che, ove non se ne tenga conto, questo risulta del tutto illusorio e quindi illusoria la *sicurezza* (dall'instabilità qualitativa) di cui è la misura. Nella Nota II cit. [2] questi stati flessionali sono stati ampiamente precisati appunto per valersene sistematicamente nella Nota V dove considerando la minorazione di E oltre σ_p sono stati dati limiti inferiori dei λ_{cr} veritieri avvalendosi dei $\lambda_{cr}^{(0)}$ illusori desunti ammettendo il campo elastico. Ma questo intervento massiccio (quasi attraverso un problema di resistenza) della flessione oltre σ_p non ha niente a che vedere con quello tipico di un problema di stabilità (qualitativa) che si è dimostrato nullo per deformazioni prive di estensione (le vere minimizzanti) o, comunque, trascurabile.

(10) Per $\varepsilon = h/6$, $h/2$, h si provocano sollecitazioni specifiche 2, 4, 7 volte quelle per $\varepsilon = 0$ cioè per N centrato, perciò $\varepsilon = h$ implica valori quasi impossibili di M quando e preminente lo stato tensionale e perciò si cerca proprio di questo il λ_{cr} siccome avviene per l'asta con sfoizo assiale, per archi portanti tenuti nel propiio piano, per le superficie cilindriche di volte autoportanti o no.