ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

BENIAMINO SEGRE

Intorno ad una congettura di Lang e Weil

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.4, p. 337-339.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_4_337_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 20 aprile 1963

Presiede il Socio anziano M. PICONE

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Intorno ad una congettura di Lang e Weil.*
Nota (*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

1. In un recente notevole lavoro, Lang e Weil [1] hanno dimostrato che, detta V una qualsiasi varietà algebrica irriducibile di dimensione d sopra un campo γ finito d'ordine q , esistono due costanti A, B tali che il numero N_v dei punti giacenti su V ed appartenenti ad un'estensione d'ordine v di γ soddisfa alla limitazione

$$(1) \quad |N_v - q^{vd}| \leq Aq^{v(d-1/2)} + Bq^{v(d-1)}$$

(al riguardo, per il caso particolare in cui q sia un numero primo, cfr. altresì Nisnevič [3]). Il minimo valore di A per cui sussiste la (1) (con v intero positivo arbitrario) è un invariante birazionale di V , il quale, se $d=1$ e cioè quando V sia una curva, risulta uguale al doppio del genere g di V .

Nel primo lavoro citato viene inoltre congetturato che, più generalmente, qualunque sia la dimensione d di V il minimo di A abbia a valere $2g$, dove g denoti l'irregolarità di V (ossia la dimensione della varietà di Picard di V). Proverò qui però (n. 3) che questa congettura non sussiste incondizionatamente, usufruendo della proposizione enunciata e stabilita nel n. 2, la quale presenta interesse anche in sé; altri risultati di tipo analogo agevolmente discendono dalla Parte III di Segre [6], come mostrerò altrove.

(*) Presentata nella seduta del 20 aprile 1963.

2. TEOREMA. - Il numero N dei punti che giacciono sulla superficie del 4° ordine di equazione

$$(2) \quad x^3 z + y^3 t + z^2 t^2 = 0$$

e che appartengono ad un campo γ d'ordine $q = p^h$, nel caso in cui p sia un numero primo $\equiv -1 \pmod{3}$ ed h denoti un numero pari [sicché q risulta un quadrato $\equiv 1 \pmod{3}$], è dato esattamente da

$$(3) \quad N = (q + 1)^2 \pm 2(q - 1)\sqrt{q},$$

ove a secondo membro va scelto il segno $+$ od il segno $-$ secondoché h non è od è divisibile per 4.

Per dimostrare questo teorema, osserviamo dapprima che la superficie (2) passa semplicemente per la retta r di equazioni

$$(4) \quad z = t = 0,$$

e per le rette (a quella appoggiate):

$$(5) \quad x = t = 0, \quad y = z = 0.$$

Il numero complessivo dei punti appartenenti a γ che giacciono sulle rette (4), (5), e che quindi stanno pure sulla superficie (2), vale manifestamente $3q + 1$; d'altro canto, le (5) sono congiunte alla (4) rispettivamente dai due piani $t = 0$ e $z = 0$, i quali non incontrano la (2) fuori delle rette (4), (5) medesime.

Gli ulteriori punti in γ della (2) si distribuiscono così nel modo seguente sui $q - 1$ piani in γ per r distinti da quei due. Uno qualunque di tali piani ha un'equazione del tipo

$$(6) \quad t = \lambda z,$$

con λ elemento non nullo di γ ; esso sega la (2), fuori di r , lungo la cubica equianarmonica rappresentata dalla (6) e dalla

$$x^3 + \lambda y^3 + \lambda^2 z^3 = 0.$$

Orbene, qualunque sia $\lambda \neq 0$, questa cubica contiene sempre esattamente

$$q + 1 \pm 2\sqrt{q}$$

punti a coordinate in γ , ove la scelta dei segni va fatta nel modo specificato alla fine del teorema enunciato nel n. 1 (cfr. Segre [6], n. 13).

Notiamo infine che - fra le cubiche suddette - precisamente $(q - 1)/3$ (quelle per cui λ è un cubo) contengono qualche punto su r a coordinate in γ , nel qual caso ovviamente - in forza della $q \equiv 1 \pmod{3}$ - ne contengono tre distinti ciascuna. Si ha pertanto in conclusione:

$$N = 3q + 1 + (q - 1)(q + 1 \pm 2\sqrt{q}) - 3 \cdot (q - 1)/3,$$

e cioè appunto la (3).

3. È subito visto che la superficie del 4° ordine (2) (in una qualsiasi estensione di γ) possiede due e soltanto due singolarità, date dai punti

$$x = y = z = 0 \quad , \quad x = v = t = 0,$$

ciascuno di questi essendo per essa doppio uniplanare (con piano tangente rispettivamente $z = 0, t = 0$), ma non tacnodale. Ne consegue che la (2) ha l'irregolarità $g = 0$, in quanto le superficie del 4° ordine irregolari sono coni e superficie dotate di retta doppia o di due tacnodi (cfr. Poincaré [5], Picard e Simart [4], Chap. V, n. 14).

Se la congettura di Lang e Weil (di cui al n. 1) valesse incondizionatamente, si potrebbe di conseguenza applicare la (1) alla superficie (2) con $A = 2g = 0, d = 2$ (e q soddisfacente alle ipotesi del teorema), il che fornirebbe

$$N - q^2 = O(q).$$

Ma questa conclusione risulta palesemente in contrasto con la (3), il che dimostra che, se $d = 2$, la suddetta congettura non sussiste senza restrizioni. Più in generale, in base anche a quanto viene osservato più oltre, il minimo di A nella (1) costituisce per $d \geq 2$ un nuovo invariante birazionale, probabilmente legato a proprietà aritmetiche delle curve tracciate su V .

Tuttavia, in un prossimo lavoro stabilirò per opportune classi di varietà algebriche e la congettura di Lang e Weil ed una generalizzazione di una congettura consimile recentemente formulata dal Mordell [2].

Va infine rilevato che, per ogni prodotto di varietà algebriche, l'invariante in questione risulta uguale alla somma dei valori ch'esso assume per i singoli fattori. Basta quindi riferirsi al prodotto della superficie (2) per una varietà algebrica arbitraria, per vedere che la congettura di Lang e Weil sussiste unicamente nel noto caso delle curve.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. LANG-A. WEIL, *Number of points of varieties in finite fields*, « Amer. Journ. of Math. », 76, 817-827 (1954).
- [2] L. J. MORDELL, *On a cubic congruence in three variables*, « Acta Arithmetica », 8, 1-9 (1962).
- [3] L. B. NISNEVIČ, *Sul numero dei punti di una varietà algebrica in un campo finito primo* (in russo), « Doklady Ak. Nauk URSS », 99, 17-20 (1954).
- [4] E. PICARD-G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1897).
- [5] H. POINCARÉ, *Sur les intégrales de différentielles totales*, « Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris », 99, 1145-1147 (1884).
- [6] B. SEGRE, *Arithmetische Eigenschaften von Galois-Räumen, I* (di prossima pubblicazione nei « Mathematische Annalen »).