Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Samuel Zaidman

Quasi-periodicità per l'equazione di Poisson

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.3, p. 241–245.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_3_241_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Quasi-periodicità per l'equazione di Poisson.* Nota di SAMUEL ZAIDMAN, presentata (*) dal Corrisp. L. AMERIO.

§ 1. In questa Nota daremo un riassunto dei risultati contenuti nel lavoro dell'autore [10], di prossima pubblicazione negli «Annali di Matematica».

Sia $f(x, t)$ una funzione definita per ogni $t \in J = (-\infty, +\infty)$ e per quasi tutti gli $x \in R^n$, tale che, per ogni $t \in J$, $\int_{R^n} |f(x, t)|^2 dx < \infty$, e $\lim_{\delta \to 0} \int_{R^n} |f(x, t+\delta) - f(x, t)|^2 dx = 0$. Essa definisce quindi una funzione fortemente continua da $t \in J$ in $L^2(R^n)$, $f(t) = \{f(t, x), x \in R^n\}$: sarà perciò $\lim_{\delta \to 0} \|f(t+\delta) - f(t)\|_{L^2} = 0$, $\int_a^b \|f(t)\|_{L^2}^2 dt < \infty$, per ogni $a, b, -\infty < a < b < +\infty$. Se chiamiamo $Q_{a,b}$ le «striscie» $R^n \times (a, b)$, la funzione $f(x, t)$ è di quadrato sommabile in ogni striscia.

Usando metodi di Lax [7] e di Malgrange [8], [9], si dimostra che:

esiste almeno una funzione $u(x, t)$ *misurabile in* $R^n \times J$, *di quadrato sommabile in ogni striscia* $Q_{a,b}$, *tale che risulti, per ogni funzione* $\Phi(x, t) \in C_0^\infty(R^n \times J)$ (indefinitamente derivabile con supporto compatto in $R^n \times J$)

$$\int_{R^n \times J} u(x, t)\left(\Phi_{tt} + \sum_1^n \Phi_{x_i x_i}\right) dx\, dt = \int_{R^n \times J} f(x, t)\, \Phi(x, t)\, dx\, dt. \tag{1}$$

Ulteriormente, con un procedimento diretto comunicatoci da Magenes (oppure usando un teorema di Browder ([5] - teor. 2.3), tale funzione $u(x, t)$, soluzione generalizzata dell'equazione di Poisson viene regolarizzata. Si dimostra infatti che $u(x, t) \in H^2(Q_{a,b})$ per ogni $Q_{a,b}$ cioè che ammette in ogni striscia derivate generalizzate del primo e del secondo ordine, di quadrato sommabile in questa striscia.

Ora è noto che esistono le tracce $\gamma_0 u(x, t) = u_0(x)$, $\gamma_0 u_t(x, t) = u^1(x)$, $\gamma_0 u_{x_i}(x, t) = u_i(x)$, sull'iperpiano $t = 0$, funzioni che appartengono, la prima a $H^1 = H^1(R^n)$, le altre a L^2. Inoltre, dopo aver eventual-

(*) Nella seduta del 9 marzo 1963.

mente cambiata la $u(t) = \{u(x,t); x \in R^n\}$ su un insieme $J_0 \subset J$ avente misura nulla, valgono le formule di rappresentazione

$$(2)\quad \begin{cases} u(x,t) = \int_0^t u_t(x,t)\,dt + u_0(x), \quad u_t(x,t) = \int_0^t u_{tt}(x,t)\,,dt + u^1(x), \\ u_{x_i}(x,t) = \int_0^t u_{x_i t}(x,t)\,dt + u_i(x). \end{cases}$$

Se ne deduce facilmente che $u(x,t)$, $u_t(x,t)$, $u_{x_i}(x,t)$ sono funzioni continue di $t \in J$ con valori in $L^2(R^n)$.

§ 2. Supponiamo ora che esista una costante $L > 0$, tale che risulti

$$(3)\qquad \| f(t) \| = \left\{ \int_{R^n} |f(x,t)|^2\,dx \right\}^{1/2} \leq L, \qquad \text{per} \quad t \in J.$$

Diremo in tal caso che la funzione $f(x,t)$ è L^2–limitata. Si dimostra dapprima con un metodo che ci è stato comunicato da Agmon, che

se l'equazione (1) *con termine noto* $f(x,t)$ L^2*–limitato, ammette una soluzione* $u(x,t)$–L^2*–limitata, allora le derivate* (generalizzate) $u_t(x,t)$, $u_{x_i}(x,t)$, *risultano* L^2*–limitate.*

Si dànno esempi di funzioni $f(x,t)$–L^2–limitate, per le quali esistono soluzioni $u(x,t)$–L^2–limitate, si dimostra l'*unicità* delle soluzioni $u(x,t)$–L^2–limitate, e si fa vedere che *per certe funzioni* $f(x,t)$–L^2*–limitate la* (1) *non ammette soluzioni* L^2*–limitate*. Nell'ultimo caso diremo che c'è la *risonanza*.

Tale circostanza – l'unicità della soluzione limitata insieme colla possibilità di risonanza mostra che il nostro problema, di tipo « singolare » (perché in tutto lo spazio), non trova analogia nel caso delle equazioni ordinarie a coefficienti costanti.

§ 3. Supponiamo ora che la funzione $f(t) = \{f(x,t), x \in R\}$ sia quasi–periodica da $t \in J$ in L^2, nel senso di Bochner [2], e cioè che:

per ogni $\varepsilon > 0$ si trovi un $l = l(\varepsilon)$, così che in ogni intervallo $(t, t+l) \subset J$ esista almeno un numero t_ε (ε–quasi–periodo), tale che

$$(4)\qquad \sup_{t \in J} \| f(t + t_\varepsilon) - f(t) \| < \varepsilon.$$

È noto [2] che tale funzione risulta, per $t \in J$, L^2–limitata, e anzi, con traiettoria in L^2 relativamente compatta. Si dimostra il seguente teorema, formalmente simile a un noto risultato di Bohr–Neugebauer, ma in sostanza più vicino al primo teorema di Favard sui sistemi quasi–periodici ordinari [6].

TEOREMA 1. – *Se* $u(x,t)$ *è una soluzione* L^2*–limitata della* (1) *con termine noto* $f(x,t)$–L^2*–quasi–periodico, allora le funzioni* $u(x,t)$, $u_t(x,t)$, $u_{x_i}(x,t)$ *sono tutte* L^2*–quasi–periodiche. Inoltre* $u(x,t)$, $u_t(x,t)$, $f(x,t)$ *hanno lo stesso « spettro ».*

Tale teorema è stato da noi dimostrato per l'equazione del calore in [13] (teor. IV.1) e il metodo che abbiamo usato, con alcune varianti, si applica anche all'equazione di Poisson.

Si considerano dapprima le funzioni $U(s, t)$, $F(s, t)$, $(s = (s_1, \cdots, s_n))$, trasformate di Fourier–Plancherel delle funzioni $u(x, t)$ e $f(x, t)$ rispetto alle sole variabili (x).

Per le proprietà d'isometria tra L^2 e se stesso della trasformata di Fourier–Plancherel, le funzioni $U(s, t)$, $F(s, t)$ risultano, la prima L^2–limitata, l'altra L^2–quasi–periodica. Inoltre, la derivata forte in L^2, $U_t(s, t)$, risulta la trasformata di $u_t(x, t)$, e per quello che abbiamo visto sopra, è anch'essa L^2–limitata. Anche le funzioni $s_i U(s, t)$, trasformate delle funzioni $u_{x_i}(x, t)$ risultano L^2–limitate.

Si considerino ora le «*proiezioni*» (L^2–ortogonali fra di loro)

$$U_p^1(s, t) = U(s, t) \quad \text{per} \quad \frac{1}{p+1} \leq |s| < \frac{1}{p} \quad , \quad = 0 \text{ per gli altri } s,$$

$$U_p^2(s, t) = U(s, t) \quad \text{per} \quad p < |s| \leq p + 1 \quad , \quad = 0 \text{ per gli altri } s,$$

e $F_p^1(s, t)$, $F_p^2(s, t)$ analogamente definite.

Si può dimostrare che le funzioni $u_p^1(t) = \{U_p^1(s, t), s \in R^n\}$, $u_p^2(t) = \{U_p^2(s, t), s \in R^n\}$, sono due volte derivabili con continuità in L^2–forte, e che valgono le relazioni

$$\frac{d^2}{dt^2} u_p^i(t) = s^2 u_p^i(t) + f_p^i(t) \tag{5}$$

per ogni $p = 1, 2, \cdots$ e $i = 1, 2$, ove $f_p^i(t) = \{F_p^i(s, t), s \in R^n\}$.

È immediato che le equazioni (5) sono equazioni differenziali astratte con operatori *limitati* come coefficienti, e che le soluzioni $u_p^i(t)$ sono L^2–limitate, mentre le $f_p^i(t)$ sono L^2–quasi–periodiche. Le equazioni (5) non ammettono più di una soluzione limitata, e tale soluzione esiste ed è L^2–quasi–periodica. Anzi, si dà una esplicita rappresentazione di queste soluzioni quasi–periodiche $U_p^i(s, t)$, e da questa si ottengono maggiorazioni della forma:

$$\| U_p^1(s, t) \|_{L^2} < M(p+1)^2 \quad , \quad \| U_p^2(s, t) \| \leq \frac{M}{p^2},$$

e analoghe per le prime derivate $\frac{d}{dt} U_p^i(s, t)$ e per le funzioni $s_j U_p^i(s, t)$.

Ora è ovvio da queste maggiorazioni che la serie $\sum_1^\infty U_p^2(s, t)$ converge uniformemente, in L^2–forte, verso la funzione quasi–periodica $U_2(s, t) = U(s, t)$ per $|s| \geq 1$, $= 0$ per $|s| < 1$. Si vede inoltre che non è possibile fare lo stesso ragionamento nella zona di risonanza $|s| \leq 1$, e perciò la quasi–periodicità della funzione $U_1(s, t) = U(s, t)$ per $|s| \leq 1$, $= 0$ per $|s| > 1$, si dimostra per un'altra strada.

Si osservi che la serie $\sum_1^\infty F_p^1(s, t)$ converge uniformemente, in L^2–forte, verso la funzione quasi–periodica $F_1(s, t) = F(s, t)$ per $|s| \leq 1$, $= 0$ per

$|s| > 1$. L'uniformità della convergenza risulta dal fatto che la traiettoria della funzione quasi–periodica considerata ha la traiettoria relativamente compatta (vedasi Amerio [2], Bochner–von Neumann [4]). Inoltre si dimostra per ogni p la maggiorazione:

$$\| |s|^2 U_p^1(s,t) \| \leq \frac{M}{p^2}, \qquad \text{ove} \quad M = \sup_{t \in J} \| u(x,t) \|_{L^2} < \infty$$

per l'ipotesi del teorema. Quindi anche la serie

$$\sum_1^\infty |s|^2 U_p^1(s,t)$$

è uniformemente convergente su $t \in J$, in L^2–forte, e d'altra parte, dalla quasi–periodicità delle $U_p^1(s,t)$ risulta quella delle funzioni $|s|^2 U_p^1(s,t)$. Quindi la serie

$$\sum_{p=1}^\infty \frac{d^2}{dt^2} U_p^1(s,t) = \sum_{p=1}^\infty |s|^2 U_p^1(s,t) + \sum_{p=1}^\infty F_p^1(s,t)$$

è uniformemente convergente, in L^2–forte, verso una funzione quasi–periodica. D'altra parte la serie $\sum_1^\infty \frac{d}{dt} U_p^1(s,t)$ L^2–converge fortemente, per ogni $t \in J$, verso la funzione $\frac{d}{dt} U_1(s,t)$. Si deduce di qui che quest'ultima funzione è derivabile in L^2–forte, e la sua derivata è proprio la somma della serie $\sum_{p=1}^\infty \frac{d^2}{dt^2} U_p^1(s,t)$, cioè una funzione quasi–periodica. Ma la funzione $\frac{d}{dt} U(s,t)$ è L^2–limitata, come risulta dal § 2, e quindi anche $\frac{d}{dt} U_1(s,t)$ è L^2–limitata, e ha derivata quasi–periodica $= \sum_1^\infty \frac{d^2}{dt^2} U_p^1(s,t)$. Per un teorema di Amerio [1], la funzione $\frac{d}{dt} U_1(s,t)$ è quasi–periodica. Ma anche la funzione $U_1(s,t)$ è L^2–limitata, per ipotesi, e applicando lo stesso teorema di Amerio, risulta anch'essa quasi–periodica. Quindi $U(s,t) = U_1(s,t) + U_2(s,t)$ è L^2–quasi–periodica, e per la proprietà d'isometria della trasformata di Plancherel, anche la $u(x,t)$ è L^2–quasi–periodica. Analogamente per $u_t(x,t)$ e $u_{x_i}(x,t)$.

Da ultimo, con condizioni supplementari di limitatezza (ma non di quasi–periodicità) sulla funzione $f(x,t)$ si ottengono risultati di quasi–periodicità in spazi più forti. Precisamente si ha il

TEOREMA 2. – *Sia* $f(x,t)$ *L^2–quasi–periodica e H^{m-1}–limitata. Allora, ogni soluzione* $u(x,t)$ *dell'equazione* (1) *che sia L^2–limitata, risulta H^m–quasi–periodica e la sua derivata* $u_t(x,t)$ *è H^{m-1}–quasi–periodica. Se* $m - 1 > n/2$, *le funzioni* $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ *sono quasi–periodiche da* $t \in J$ *in* $C_\infty(R^n)$ (spazio delle funzioni continue in R^n e nulle all'infinito, con la convergenza uniforme su R^n).

Osserviamo che la funzione $f(x,t)$ risulta H^{m-1}–limitata se, essendo $F(s,t)$ la sua trasformata di Plancherel, si ha $\int_{R^n} (1 + |s|^2)^{m-1} |F(s,t)|^2 ds \leq M$,

$t \in J$. La funzione $u(x, t)$ risulta H^m–quasi–periodica, se ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un l_ε, tale che in ogni intervallo $(t, t + l_\varepsilon)$ esiste almeno un t_ε, così che

$$\sup_{t \in J} \int_{R^n} (1 + |s|^2)^m |U(s, t + t_\varepsilon) - U(s, t)|^2 ds < \varepsilon^2.$$

Infine, la funzione $u(x, t)$ è quasi–periodica da $t \in J$ in $C_\infty(R^n)$, se ad ogni $\varepsilon > 0$ corrisponde un l_ε, tale che in ogni intervallo $(t, t + l_\varepsilon)$ si trova almeno un t_ε, cosi che risulti

$$\sup_{t \in J} \sup_{x \in R^n} |u(x, t + t_\varepsilon) - u(x, t)| < \varepsilon.$$

Per la dimostrazione del teorema 2 si procede come nel teorema 1. È ovvio che la funzione $(1 + |s|^2)^{m/2} U_1(s, t)$ risulta L^2–quasi–periodica. Inoltre, con maggiorazioni supplementari e usando le nuove ipotesi si studia la serie $\sum_1^\infty (1 + |s|^2)^{m/2} U_p^2(s, t)$ e si dimostra che converge uniformemente in J. Un teorema simile si può dare anche per l'equazione del calore, completando così il teorema IV.1 di [11].

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. AMERIO, *Sull'integrazione delle funzioni quasi–periodiche a valori in uno spazio hilbertiano*, « Acc. Naz. dei Lincei », vol. 28, 5 (maggio) 1960.

[2] L. AMERIO, *Quasi–periodicità degli integrali ad energia limitata dell'equazione delle onde, con termine noto quasi–periodico*, « Acc. Naz. dei Lincei », vol. 28, 2, 3, 4 (1960).

[3] S. BOCHNER, *Abstrakte fast–periodische Funktionen*, « Acta Math. », vol. 61, pp. 149–184 (1933).

[4] S. BOCHNER–J. VON NEUMANN, *On compact solutions of operational–differential equations*, « Ann. Math. », vol. 36, pp. 255–290 (1935).

[5] F. E. BROWDER, *Functional analysis and Partial differential equations*, « Math. Ann. », vol. 145, pp. 81–226 (1962).

[6] J. FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque–périodiques*, Paris, Guathier–Villars, 1933.

[7] P. D. LAX, *A stability theorem of abstract differential equations*..., « Comm. Pure Appl. Math. », vol. 8, pp. 747–766 (1956).

[8] B. MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, « Ann. Inst. Fourier », vol. 6, pp. 271–355 (1956).

[9] B. MALGRANGE, *Operatori differenziali*, C.I.M.E., sett. 1961, Edizioni Cremonese, Roma (ciclostilato).

[10] S. ZAIDMAN, *Soluzioni limitate e quasi–periodiche dell'equazione di Poisson* (di prossima pubblicazione).

[11] S. ZAIDMAN, *Soluzioni limitate e quasi–periodiche dell'equazione del calore non–omogenea*, « Acc. Naz. dei Lincei » (I, II), vol. 31, 6; vol. 32, 1 (1961–62).