ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIULIO SUPINO

Propagazioni ondose nei canali a marea. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.3, p. 229-232.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_3_229_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 marzo 1963

Presiede il Presidente GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Idrodinamica. — *Propagazioni ondose nei canali a marea.* Nota I (*)
del Corrisp. GIULIO SUPINO.

1. Si consideri una corrente lenta in un canale che sfoci in mare e soggetto perciò all'azione della marea. Si vuole sapere come l'onda di marea si propaga all'interno.

Per valutare il fenomeno si devono distinguere due casi. Può infatti accadere che il canale sfoci liberamente o che la sua foce sia chiusa da porte vinciane. In quest'ultimo caso la marea non può propagarsi all'interno del canale, ma, avendo questo una propria portata (costante) e trovandosi chiusa la foce, il livello dell'acqua crescerà anche all'interno e a seconda della pendenza e della portata può essere che cresca meno (o più) della marea in mare. Nel caso che il livello interno tenda a crescere più del livello esterno, le porte vinciane non si chiudono (e pertanto esse risultano inutili). Una utilità conservano invece (contrariamente a quanto si dovrebbe ritenere) se esse si riaprono in corrispondenza della massima alta marea.

2. Il problema sarà considerato nel campo del moto variabile col tempo e relativamente a piccole oscillazioni rispetto ad un moto uniforme. In questo

(*) Presentata nella seduta del 9 marzo 1963.

campo ho già indicato ⁽¹⁾ l'equazione cui si riconduce il problema; con i simboli adottati nelle Note ricordate si ha:

$$(1 - F) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2g_0}{gY_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{gY_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{3if}{Y_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2if}{g_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

(essendo $q = \frac{-\partial \varphi}{\partial t}$, $y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$)

e si può scrivere

$$\varphi = Ae^{\lambda x} \operatorname{sen} v \left(t - \frac{x}{\omega} \right).$$

L'equazione precedente dà allora un legame tra v ($= \frac{2\pi}{T}$) che si ritiene sia un dato del problema, λ (attenuazione) e ω (velocità di propagazione).

Si trova, in generale

$$\lambda = X + \frac{3if}{2(1-F)Y_0}$$

$$\omega = \frac{-2(1-F)^2 Y_0 X}{if(2+F) + 2F(1-F)Y_0 X} U_0,$$

essendo

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} X^2 = \frac{9i_f^2 - 4Y_0 v^2}{8(1-F)^2 Y_0^2} + R \\ R^2 = S^2 + \frac{1}{(1-F)^3} \left(\frac{vif}{g_0} \right)^2 \left(1 - \frac{F}{4} \right) \\ S = \frac{9i_f^2 + 4Y_0 v^2}{8(1-F)^2 Y_0^2} \end{array} \right.$$

Ricordiamo pure che per la R si deve prendere sempre la determinazione positiva (se no X sarebbe immaginario) e che pertanto si ha un solo X^2 e due valori per X eguali e di segno opposto.

Se la corrente di moto uniforme è lenta, le onde possono risalire il canale e quindi si attenuano se è $\lambda > 0$ (perché procedendo verso monte si va verso le x negative). Invece le onde discendenti richiedono un $\lambda < 0$ e da questa condizione si deduce che deve essere $|X| > \frac{3if}{2(1-F)Y_0}$ e che pertanto nelle onde ascendenti è $\lambda > \frac{3if}{(1-F)Y_0}$.

È questo il limite di λ per $v \rightarrow 0$ e onde ascendenti. Circa la velocità di propagazione osserveremo che se è $X \approx \frac{3if}{2(1-F)Y_0}$ (ed una forte differenza di questo valore non può aversi perché le onde discendenti di periodo lungo si attenuano molto lentamente e quindi $\frac{3if}{2(1-F)Y_0} - X = \lambda$ è un valore negativo molto piccolo) allora $\omega \approx \frac{3U_0}{2+4F}$, cioè (per F piccolo) la velocità

(1) Si vedano le mie Note: *Sopra le onde di traslazione nei canali*. - A) *La equazione linearizzata*. - Note I e II dei « Rendiconti della Accademia Naz. dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, serie VIII, vol. XXIX (2° sem. 1960) pp. 239-243 e 473-476.

di propagazione delle onde ascendenti differisce poco da quella delle onde lunghe discendenti ($\approx 3/2 U_0$ come è noto).

3. Vediamo ora di dare una limitazione per le onde ascendenti libere (indicando con questo aggettivo le onde che possono risalire il canale senza trovare ostacoli alla loro propagazione).

Un'onda ascendente libera sinusoidale, dà luogo alla oscillazione

$$y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A\lambda e^{\lambda x} \operatorname{sen} v \left(t - \frac{x}{\omega} \right) - A \frac{v}{\omega} e^{\lambda x} \cos v \left(t - \frac{x}{\omega} \right)$$

e pertanto se la sua massima altezza alla foce è A_0 la oscillazione y si attenua come $A_0 e^{\lambda x}$. In base alle limitazioni del numero precedente segue

$$(1) \quad y \leq A_0 e^{-\frac{3i_f}{(1-F)Y_0} x}$$

(prendendo le x positive verso monte).

Confrontiamo ora la (1) con un profilo di rigurgito di rigonfiamento di altezza A_0 . Tale profilo deve essere considerato in alveo rettangolare molto largo (perché in tale alveo sono considerate le onde ascendenti) e con riferimento a piccoli valori del rigurgito (perché le onde sono state linearizzate con l'affermazione che si trattava di piccole onde).

Posto $z = \frac{Y_0 + y}{Y_0}$ il rigurgito ha l'andamento:

$$(2) \quad i_f \frac{x}{Y_0} = z_1 - z + (1 - F) [\Phi_3(z) - \Phi_3(z_1)]$$

con

$$\Phi_3(z) = \int \frac{dz}{1-z^3}.$$

Ma essendo $z = \frac{Y_0 + y}{Y_0} = 1 + \frac{y}{Y_0}$ con $\frac{y}{Y_0}$ piccolo in confronto all'unità, si potrà scrivere

$$z^3 = 1 + \frac{3y}{Y_0}, \quad dz = \frac{dy}{Y_0}$$

e quindi

$$\Phi_3(z) = - \int \frac{d \frac{y}{Y_0}}{3 \frac{y}{Y_0}} = -\frac{1}{3} \ln \frac{y}{Y_0}.$$

Segue

$$\Phi_3(z) - \Phi_3(z_1) = \frac{1}{3} \ln \frac{A_0}{y} \quad \left(z_1 = 1 + \frac{A_0}{Y_0} \right)$$

$$z_1 - z = \frac{A_0 - y}{Y_0}$$

e quindi, dalla (2),

$$\ln \frac{A_0}{y} = \frac{3 i_f x}{(1-F) Y_0} - \frac{3(A_0 - y)}{(1-F) Y_0}$$

$$y = A e^{-\frac{3 i_f x}{(1-F) Y_0}} e^{\frac{3(A_0 - y)}{(1-F) Y_0}}.$$

Confrontando questa con la $y = e^{-\lambda x}$ si osserva:

a) che la linea dei colmi d'onda si abbassa più rapidamente di $e^{-\frac{3i_f x}{(1-F)Y_0}}$ (perché è $\lambda > \frac{3i_f x}{(1-F)Y_0}$);

b) che il profilo di moto permanente si attenua invece più lentamente di $e^{-\frac{3i_f x}{(1-F)Y_0}}$ perché interviene a fattore il termine $e^{\frac{3(\Lambda_0 - y)}{(1-F)Y_0}}$ che è certamente crescente al diminuire di y .

Concludiamo perciò affermando che l'attenuazione dei colmi dell'onda ascendente è più rapida che non quella del profilo di rigurgito: riferendoci a questo si ha la sicurezza che l'onda resta più bassa.

Se invece di un'onda sinusoidale semplice si trattasse di una serie di Fourier, la conclusione sarebbe identica in quanto il termine n^{mo} della serie ha λ_n maggiore di λ_{n-1} e pertanto, valutata l'altezza massima alla foce, l'attenuazione effettiva soddisferebbe ancora alla (1).