Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Amerio

Sul teorema di approssimazione delle funzioni quasi-periodiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.2, p. 97–104.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_2_97_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 febbraio 1963

Presiede il Presidente GINO CASSINIS

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sul teorema di approssimazione delle funzioni quasi-periodiche* (*). Nota (**) del Corrisp. LUIGI AMERIO.

1. Sia X uno spazio di Banach: indichiamo con x gli elementi di X, con $\|x\|$ le loro norme. Sia poi J l'intervallo $-\infty < t < +\infty$.

Nella teoria delle funzioni quasi-periodiche, da J in X, è di fondamentale importanza il *teorema di approssimazione*. Questo teorema afferma che l'*insieme delle funzioni q. p. coincide con la chiusura, rispetto alla convergenza uniforme in* J, *dell'insieme dei polinomi trigonometrici.*

Il teorema di approssimazione è stato dimostrato in vari modi nell'ipotesi che X sia il corpo complesso: ricordiamo, oltre alle dimostrazioni di Bohr, H. Weyl, de la Vallée Poussin, Bochner, quella di Bogoliubov [1]. Per il caso generale, ricordiamo le dimostrazioni di Bochner [2], Bochner e von Neumann [3], Kopec [4], Zaidman [5].

(*) Istituto Matematico del Politecnico di Milano. Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1962-63.

(**) Presentata nella seduta del 9 febbraio 1963.

(1) Cfr. C. CORDUNEANU, *Functii aproape-periodice*, Ac. Rep. Pop. Romîne, 1961, pp. 23-30.

(2) S. BOCHNER, *Abstrakte fastperiodische funktionen*, «Acta Math.», *61*, pp. 149-184 (1933).

(3) S. BOCHNER, J. VON NEUMANN, *Almost periodic functions in groups*, II, «Trans. Amer. Math. Soc.», *37*, pp. 21-50 (1935).

(4) J. KOPEC, *On vector valued almost-periodic functions*, «Ann. Soc. Pol. Math.», *25*, pp. 100-105 (1952).

(5) S. ZAIDMAN, *Solutions presque-périodiques des équations hyperboliques*, «Ann. Ec. Norm. Sup.», *79*, pp. 151-198 (1962).

Scopo di questa Nota è di dare una dimostrazione diretta, per gli spazi di Banach, estendendo quella di Bogoliubov. Si deve notare che tale estensione è pressoché immediata se X è uno spazio di Hilbert. Nel caso che X sia uno spazio di Banach qualsiasi, la dimostrazione riesce invece alquanto diversa da quella di Bogoliubov, poiché vengono a mancare l'eguaglianza di Parseval per lo sviluppo in serie di una funzione periodica a valori in X e (se X non è riflessivo) la compattezza debole della sfera $\| x \| \leq 1$. Peraltro, anche nel caso generale, la dimostrazione ottenuta mi sembra particolarmente semplice.

2. Poniamo, per $\lambda \in J$, $T > 0$,

$$a(\lambda, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt \tag{2.1}$$

e dimostriamo, innanzi tutto, il seguente teorema.

I. – *Se $f(t)$ è q. p. la funzione $a(\lambda, T)$ ha, in X, traiettoria relativamente compatta.*

Ricordiamo che la traiettoria R_f della funzione q. p. $f(t)$, $t \in J$, è relativamente compatta.

Si riconosce allora, immediatamente, che anche la funzione

$$g(\lambda, t) = e^{-i\lambda t} f(t) \qquad (\lambda, t \in J)$$

ha traiettoria relativamente compatta: basta infatti tener presente che il fattore $e^{-i\lambda t}$ è limitato per $\lambda, t \in J$.

Sia ora G l'estensione convessa di $g(\lambda, t)$, cioè l'insieme dei punti x del tipo

$$x = \sum_{1}^{n}{}_k\, \rho_k\, g(\lambda_k, t_k),$$

con

$$\lambda_k, t_k \in J \quad , \quad \rho_k \geq 0 \quad , \quad \sum_{1}^{n}{}_k\, \rho_k = 1 .$$

Per un teorema di Mazur [(6)], anche l'insieme G è relativamente compatto, cioè ha chiusura $\overline{G}$ compatta.

Dimostriamo che, per ogni $\lambda \in J$, $T > 0$, è

$$a(\lambda, T) \in \overline{G}. \tag{2.2}$$

Diviso infatti l'intervallo $-T \vdash\!\dashv T$ in n parti eguali di ampiezza $2T/n$ (mediante i punti $-T = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$), consideriamo la somma

$$a_n(\lambda, T) = \sum_{1}^{n}{}_k \frac{1}{n} f(t_k)\, e^{-i\lambda t_k} = \sum_{1}^{n}{}_k\, \rho_k\, g(\lambda, t_k),$$

essendo $\rho_k = (1/n)$.

(6) Cfr. N. DUNFORD, J. SCHWARZ, *Linear operators*, Interscience Publ., 1958, I, p. 416.

Risulta, ovviamente,

$$a_n(\lambda, T) \in G$$

ed avendosi

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\lambda, T) = a(\lambda, T),$$

è provata la (2.2) e quindi la tesi.

3. Dimostriamo ora il *teorema di approssimazione.*

II. – *Se $f(t)$ è q. p. esiste, in corrispondenza di ogni $\varepsilon > 0$, un polinomio trigonometrico:*

$$p(t) = \sum_{1}^{q}{}_m b_m e^{i\lambda_m t} \qquad (a_m \in X, \lambda_m \in J),$$

tale che risulti

$$\sup_{t\in J} \| f(t) - p(t) \| \leq \varepsilon. \tag{3.1}$$

α) Si fissi, ad arbitrio, $\varepsilon > 0$. Poiché $f(t)$ è q. p., esistono, in corrispondenza, due numeri $l > 0$ e $0 < \delta < l/2$ tali che ogni intervallo $a \vdash\!\dashv a + l$ contenga un subintervallo di ampiezza 2δ, tutto costituito da ε–quasi–periodi per $f(t)$.

Sia poi $\varphi(t)$ una funzione definita in $-\delta \vdash\!\dashv \delta$ e soddisfacente alle condizioni seguenti:

$$\varphi(t) \geq 0 \quad , \quad \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)\, dt = l \quad , \quad \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^2(t)\, dt < +\infty. \tag{3.2}$$

Consideriamo la successione di intervalli $kl \vdash\!\dashv (k+1)l$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$; nell'intervallo $kl \vdash\!\dashv (k+1)l$ si prenda un subintervallo aperto Δ_k, di ampiezza 2δ e punto medio t_k, costituito tutto da ε–quasi–periodi per $f(t)$.

Poniamo

$$\omega(t) = \begin{cases} \varphi(t - t_k) & \text{per } t \in \Delta_k \\ 0 & \text{per } t \notin \bigcup_{-\infty}^{\infty}{}_k \Delta_k \end{cases} \tag{3.3}$$

e definiamo, in corrispondenza di ogni intero positivo n, la funzione (7):

$$f_n(t) = \frac{1}{(2nl)^3} \int_{-nl}^{nl} \omega(\xi)\, d\xi \int_{-nl}^{nl} \omega(\eta)\, d\eta \int_{-nl}^{nl} \omega(\zeta) f(t + \xi + \eta + \zeta)\, d\zeta. \tag{3.4}$$

(7) Nella dimostrazione di Bogoliubov si considera la funzione $f_n(t)$ definita dall'integrale doppio:

$$f_n(t) = \frac{1}{(2nl)^2} \int_{-nl}^{nl} \omega(\xi)\, d\xi \int_{-nl}^{nl} \omega(\eta) f(t + \xi + \eta)\, d\eta.$$

Osserviamo che la condizione $\omega(\xi)\,\omega(\eta)\,\omega(\zeta) \neq 0$ implica che ξ, η, ζ siano, simultaneamente, ε-quasi-periodi: pertanto $\xi + \eta + \zeta$ risulta un $3\,\varepsilon$-quasi-periodo, cioè si ha

$$\sup_{t \in J} \| f(t + \xi + \eta + \zeta) - f(t) \| \leq 3\,\varepsilon. \tag{3.5}$$

È poi, per la seconda delle (3.2) e per la (3.3),

$$\frac{1}{2\,nl} \int_{-nl}^{nl} \omega(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\,nl} \sum_{-n}^{n-1}{}_k \int_{\Delta_k} \varphi(\xi - t_k)\, d\xi = \frac{1}{2\,nl}\, 2\,n \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)\, dt = 1\,, \tag{3.6}$$

e quindi dalle (3.4) e (3.5) segue

$$\| f(t) - f_n(t) \| = \left\| \frac{1}{(2\,nl)^3} \int_{-nl}^{nl} \omega(\xi)\, d\xi \int_{-nl}^{nl} \omega(\eta)\, d\eta \int_{-nl}^{nl} \omega(\zeta) \{ f(t + \xi + \eta + \zeta) - f(t) \}\, d\zeta \right\| \leq \tag{3.7}$$

$$\leq \frac{1}{(2\,nl)^3} \int_{-nl}^{nl} \omega(\xi)\, d\xi \int_{-nl}^{nl} \omega(\eta)\, d\eta \int_{-nl}^{nl} \omega(\zeta)\, \| f(t + \xi + \eta + \zeta) - f(t) \|\, d\zeta \leq 3\,\varepsilon.$$

Si ponga ora, nell'intervallo $-4\,nl \leq t \leq 4\,nl$,

$$\omega_n(t) = \begin{cases} \omega(t) & \text{per } |t| \leq nl \\ 0 & \text{per } nl < |t| \leq 4\,nl. \end{cases} \tag{3.8}$$

Risulta, sviluppando ivi $\omega_n(t)$ in serie di Fourier (convergente in media):

$$\omega_n(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \omega_k^{(n)} e^{i\nu_k^{(n)} t} \qquad \left(\nu_k^{(n)} = \frac{k\pi}{4\,nl} \right). \tag{3.9}$$

con

$$\omega_k^{(n)} = \frac{1}{8\,nl} \int_{-4\,nl}^{4\,nl} \omega_n(t)\, e^{-i\nu_k^{(n)} t}\, dt = \frac{1}{8\,nl} \int_{-nl}^{nl} \omega(t)\, e^{-i\nu_k^{(n)} t}\, dt = \tag{3.10}$$

$$= \frac{1}{8\,nl} \sum_{-n}^{n-1}{}_j e^{-i\nu_k^{(n)} t_j} \int_{\Delta_j} \varphi(t - t_j)\, e^{-i\nu_k^{(n)}(t - t_j)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{8\,nl} \sum_{-n}^{n-1}{}_j e^{-i\nu_k^{(n)} t_j} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)\, e^{-i\nu_k^{(n)} t}\, dt.$$

Ne segue, per la seconda delle (3.2),

$$|\,\omega_k^{(n)}\,| \leq \frac{1}{4\,l} \left| \int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)\, e^{-i\nu_k^{(n)} t}\, dt \right| \quad , \quad |\,4\,\omega_k^{(n)}\,| \leq 1\,, \tag{3.11}$$

ed è inoltre, per l'eguaglianza di Parseval e la terza delle (3.2),

$$(3.12)\qquad \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k \,|\,\omega_k^{(n)}\,|^2 = \frac{1}{8\,nl}\int\limits_{-4\,nl}^{4\,nl}\omega_n^2(t)\,dt = \frac{1}{8\,nl}\int\limits_{-nl}^{nl}\omega^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{8\,nl}\sum_{-n}^{n-1}{}_j\int\limits_{\Delta_j}\varphi^2(t-t_j)\,dt = \frac{1}{4\,l}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\varphi^2(t)\,dt = \rho^2 < +\infty.$$

Sviluppiamo ora $f(t)$, nell'intervallo $-4\,nl \leq t \leq 4\,nl$, in serie di Fourier. Risulta

$$(3.13)\qquad f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, c_k^{(n)}\, e^{i\nu_k^{(n)}t}$$

essendo, per la (2.1),

$$(3.14)\qquad c_k^{(n)} = \frac{1}{8\,nl}\int\limits_{-4\,nl}^{4\,nl} f(t)\, e^{-i\nu_k^{(n)}t}\,dt = a\,(\nu_k^{(n)}, 4\,nl).$$

Poiché $f(t)$ è continua nell'intervallo considerato, la serie (3.13) è ivi sommabile (per il teorema di Fejer) con il metodo di Cesaro: inoltre la serie stessa risulta sommabile, al valore di $f(t)$, uniformemente in ogni intervallo $a \,\vert\!\!-\!\!\vert\, b$ interno all'intervallo $|\,t\,| \leq 4\,nl$.

Sia ora $|\,t\,| < nl$. Dalle (3.4), (3.9) e (3.13) segue (supponendo sempre di sommare la serie col metodo di Cesaro)

$$(3.15)\qquad f_n(t) = \frac{1}{(2\,nl)^3}\int\limits_{-nl}^{nl}\omega(\xi)\,d\xi\int\limits_{-nl}^{nl}\omega(\eta)\,d\eta\int\limits_{-nl}^{nl}\omega(\zeta)\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, c_k^{(n)}\, e^{i\nu_k^{(n)}(t+\xi+\eta+\zeta)}\,d\zeta =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, c_k^{(n)}\, e^{i\nu_k^{(n)}t}\,\frac{1}{(2\,nl)^3}\int\limits_{-nl}^{nl}\omega(\xi)\,e^{i\nu_k^{(n)}\xi}\,d\xi\int\limits_{-nl}^{nl}\omega(\eta)\,e^{i\nu_k^{(n)}\eta}\,d\eta\int\limits_{-nl}^{nl}\omega(\zeta)\,e^{i\nu_k^{(n)}\zeta}\,d\zeta =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, c_k^{(n)}\,(4\,\omega_{-k}^{(n)})^3\, e^{i\nu_k^{(n)}t},$$

poiché si ha $|\,\xi+\eta+\zeta+t\,| \leq 3\,nl + |\,t\,| < 4\,nl$.

Osserviamo ora che, posto

$$(3.16)\qquad \operatorname*{Sup}_{t\in J}\|\,f(t)\,\| = \mathrm{M} < +\infty,$$

risulta, per la (3.14),

$$(3.17)\qquad \|\,c_k^{(n)}\,\| \leq \mathrm{M}$$

e quindi, per la (3.12) e la seconda delle (3.11),

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\,\|\,c_k^{(n)}\,\|\,|\,4\,\omega_{-k}^{(n)}\,|^3 \leq 16\,\mathrm{M}\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\,|\,\omega_{-k}^{(n)}\,|^2 = 16\,\mathrm{M}\rho^2.$$

Perciò la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, c_k^{(n)}\,(4\,\omega_{-k}^{(n)})^3\, e^{i\nu_k^{(n)} t} \tag{3.18}$$

converge (nel senso ordinario) assolutamente e uniformemente nell'intervallo $|t| \leq nl$ ed ha ivi come somma la funzione continua $f_n(t)$.

β) Dimostriamo che esiste un valore $\mu \geq 0$, dipendente da ε ma non da n, tale che risulti

$$\sum_{|\nu_k^{(n)}| > \mu} \| c_k^{(n)} \|\, |4\,\omega_{-k}^{(n)}|^3 \leq \varepsilon. \tag{3.19}$$

È infatti, per ogni $\sigma \geq 0$,

$$\sum_{|\nu_k^{(n)}| > \sigma} \| c_k^{(n)} \|\, |4\,\omega_{-k}^{(n)}|^3 \leq 64\,\mathrm{M}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}_k\, |\omega_{-k}^{(n)}|^2\right) \sup_{|\nu_k^{(n)}| > \sigma} |\omega_{-k}^{(n)}| =$$

$$= 64\,\rho^2\,\mathrm{M} \sup_{|\nu_k^{(n)}| > \sigma} |\omega_{-k}^{(n)}|.$$

Posto poi

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{4l}\int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$$

si ha, come è noto,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \psi(\lambda) = 0.$$

Esiste perciò $\mu \geq 0$ tale che, per $|\lambda| > \mu$, sia

$$|\psi(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{64\,\rho^2\,\mathrm{M}}. \tag{3.20}$$

Poiché risulta, per la prima delle (3.11),

$$|\omega_{-k}^{(n)}| \leq |\psi(\nu_{-k}^{(n)})| = |\psi(\nu_k^{(n)})|,$$

dalla (3.20) segue la (3.19).

Per le (3.15) e (3.19) è allora

$$\left\| f_n(t) - \sum_{|\nu_k^{(n)}| \leq \mu} c_k^{(n)}\,(4\,\omega_{-k}^{(n)})^3\, e^{i\nu_k^{(n)} t} \right\| \leq \varepsilon \qquad (|t| \leq nl). \tag{3.21}$$

γ) Disponiamo, per ogni n, i fattori di convergenza $\omega_{-k}^{(n)}$ in ordine di modulo decrescente, ciò che è possibile per la (3.12). Otteniamo una nuova successione

$$\{\vartheta_m^{(n)}\}, \qquad \text{con } \vartheta_m^{(n)} = 4\,\omega_{-k_m}^{(n)} \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

e risulta

$$|\vartheta_1^{(n)}| \geq |\vartheta_2^{(n)}| \geq \cdots \geq |\vartheta_m^{(n)}| \geq \cdots; \qquad |\vartheta_m^{(n)}| \leq 1. \tag{3.22}$$

Poniamo poi

$$b_m^{(n)} = c_{k_m}^{(n)} \quad , \quad \lambda_m^{(n)} = \nu_{k_m}^{(n)},$$

sicché la (3.21) si scriverà

$$\left\| f_n(t) - \sum_{1}^{r_n}{}_m \, b_m^{(n)} (\vartheta_m^{(n)})^3 e^{i\lambda_m^{(n)} t} \right\| \leq \varepsilon \qquad (|t| \leq nl) \tag{3.23}$$

essendo, per la seconda delle (3.9) e la (3.21),

$$r_n = 2\left[\frac{4nl\mu}{\pi}\right] + 1.$$

Dimostriamo che esiste un intero positivo q, dipendente da ε ma non da n, tale che sia

$$\sum_{q+1}^{\infty}{}_m \| b_m^{(n)} \| \, | \vartheta_m^{(n)} |^3 \leq \varepsilon. \tag{3.24}$$

Infatti si ha, per $p \geq 1$,

$$\sum_{p}^{\infty}{}_m \| b_m^{(n)} \| \, | \vartheta_m^{(n)} |^3 \leq \mathrm{M} \, | \vartheta_p^{(n)} | \sum_{1}^{\infty}{}_m | \vartheta_m^{(n)} |^2 = \tag{3.25}$$

$$= \mathrm{M} \, | \vartheta_p^{(n)} | \sum_{-\infty}^{\infty}{}_k | 4\,\omega_k^{(n)} |^2 = 16\,\mathrm{M}\rho^2 \, | \vartheta_p^{(n)} | .$$

Siccome poi risulta

$$p \, | \vartheta_p^{(n)} |^2 \leq \sum_{1}^{p}{}_k | \vartheta_k^{(n)} |^2 \leq 16\,\rho^2,$$

si ricava

$$| \vartheta_p^{(n)} | \leq \frac{4\rho}{\sqrt{p}} \tag{3.26}$$

e quindi, per la (3.25),

$$\sum_{p}^{\infty}{}_m \| b_m^{(n)} \| \, | \vartheta_m^{(n)} |^3 \leq \frac{64\,\mathrm{M}\rho^3}{\sqrt{p}} .$$

La (3.24) è perciò soddisfatta se prendiamo

$$q + 1 \geq \left(\frac{64\,\mathrm{M}\rho^3}{\varepsilon}\right)^2 .$$

Per la (3.24), la (3.23) diventa (supponendo senz'altro $r_n > q$)

$$\left\| f_n(t) - \sum_{1}^{q}{}_m \, b_m^{(n)} (\vartheta_m^{(n)})^3 e^{i\lambda_m^{(n)} t} \right\| \leq 2\,\varepsilon \qquad (|t| \leq nl) \tag{3.26}$$

e dalla (3.7) segue la disuguaglianza

$$\left\| f(t) - \sum_{1}^{q}{}_m \, b_m^{(n)} (\vartheta_m^{(n)})^3 e^{i\lambda_m^{(n)} t} \right\| \leq 5\,\varepsilon \qquad (|t| \leq nl). \tag{3.27}$$

δ) Osserviamo che risulta, per quanto dimostrato in α), β) e per la (3.14),

$$|\lambda_m^{(n)}| \leq \mu \quad , \quad |\vartheta_m^{(n)}| \leq 1,$$

$$b_m^{(n)} = c_{k_m}^{(n)} = a\,(\nu_{k_m}^{(n)}, 4\,nl).$$

Poiché le successioni $\{\lambda_m^{(n)}\}$, $\{\vartheta_m^{(n)}\}$ sono limitate e poiché la funzione $a\,(\lambda\,,\mathrm{T})$ ha traiettoria relativamente compatta, possiamo estrarre dalla successione $\{n\}$ una sottosuccessione $\{n_j\}$ tale che sia, per ogni m,

$$\lim_{j\to\infty} \vartheta_m^{(n_j)} = \vartheta_m,$$

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_m^{(n_j)} = \lambda_m,$$

$$\lim_{j\to\infty} b_m^{(n_j)} = b_m.$$

Dalla (3.27) segue allora

$$\left\| f(t) - \sum_{1}^{q}{}_m\, b_m\, e^{i\lambda_m t} \right\| \leq 5\,\varepsilon \qquad (t \in \mathrm{J})$$

e la (3.1) (in cui si ponga $5\,\varepsilon$ in luogo di ε) risulta dimostrata.