
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ARIO ROMITI

Un'estensione dei metodi d'indagine dei sistemi lineari per lo studio del comportamento asintotico dei servomeccanismi non lineari

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.2, p.
156-160.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_2_156_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Un'estensione dei metodi d'indagine dei sistemi lineari per lo studio del comportamento asintotico dei servomeccanismi non lineari.* Nota di ARIO ROMITI, presentata (*) dal Corrisp. C. FERRARI.

1. Scopo del presente lavoro è l'estensione del campo di validità della linearizzazione equivalente per lo studio del comportamento asintotico, con perturbazioni iniziali comunque grandi, ad una classe di servomeccanismi non lineari comprendente un sistema del terz'ordine, e tutti i sistemi descritti da equazioni aventi tutte le radici caratteristiche generalizzate reali. Inoltre sono state determinate, per i sistemi linearizzabili, le soluzioni orbitali corrispondenti ai casi critici al limite della stabilità.

La legge di variazione nel tempo della grandezza del segnale in un punto del circuito chiuso di regolazione in esame è definita da un'equazione differenziale omogenea, del tipo:

$$(1) \quad y^{(n)} + \sum_{i=1}^n f_i y^{(i-1)} = 0$$

ove le f_i sono in generale funzioni della y e delle sue prime $n-1$ derivate.

La funzione di trasferta della parte lineare del sistema sia:

$$(2) \quad W(p) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i p^{i-1}}{p^n + \sum_{i=1}^n a_i p^{i-1}} = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\mathcal{L}\{x\}}{\mathcal{L}\{f(x)\}}$$

ove $f(x)$ descrive la curva caratteristica dell'elemento non lineare, ed è:

$$(3) \quad 0 < \frac{f(x)}{x} = \varphi(x) < c.$$

Indicando con y una variabile ausiliaria, si può porre:

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\{B(p)y\} = x \\ \mathcal{L}^{-1}\{A(p)y\} = f(x) \end{cases}$$

$$(5) \quad \mathcal{L}^{-1}\{A(p)y\} = \varphi(x) \mathcal{L}^{-1}\{B(p)y\}.$$

Scrivendo la (5) nella forma (1), si ha:

$$(6) \quad f_i = a_i - b_i \varphi(x).$$

Il metodo di linearizzazione qui adottato è quello descritto in [1]. Si ricercano cioè le condizioni di stabilità della (1) per f_i costanti; le condizioni

(*) Nella seduta del 9 febbraio 1963.

devono essere soddisfatte per tutti i valori compresi nel dominio di variazione delle f_i .

Con il metodo delle analogie meccaniche, in [1] si è ricavato che le condizioni di stabilità tratte dalle equazioni linearizzate sono valide quando queste sono del primo o del second'ordine, o del terz'ordine con $f_2 = \text{cost}$, oppure $f_3 = \text{cost}$, oppure $f_3/f_1 = \text{cost}$, o di ordine superiore con relazioni tra i coefficienti più complicate.

2. Vediamo ora, con altro metodo, un altro caso riguardante equazioni del terz'ordine. Lo spunto ci è stato fornito dagli studi effettuati sull'equazione

$$\ddot{y} + f(y) \dot{y} + h\dot{y} + ky = 0$$

da Shimanov (ved. [2]) e da Pliss e Ogurtsov (ved. [3]). Questi ultimi diedero le condizioni di stabilità più ampie, coincidenti con quelle di Routh-Hurwitz generalizzate. Opportunamente modificando la funzione di Liapunov da loro data, abbiamo visto che è possibile ottenere gli stessi risultati quando anche i coefficienti f_2 ed f_1 sono variabili, purché rimanga costante f_2/f_1 .

L'equazione (1) può esser scritta in forma di sistema del prim'ordine; per $n = 3$ si ha:

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = -f_1 y_1 - f_2 y_2 - f_3 y_3. \end{cases}$$

Sia dunque f_2/f_1 costante, e si consideri la seguente funzione di Liapunov:

$$(8) \quad V = \frac{1}{2} \left[\int_0^{y_3 + \frac{f_1}{f_2} y_2} f_2 d\left(y_3 + \frac{f_1}{f_2} y_2\right)^2 + \int_0^{\left(\frac{f_1}{f_2} y_1 + y_2\right)^2} f_2^2 d\left(\frac{f_1}{f_2} y_1 + y_2\right)^2 + \int_0^{y_2^2} f_1 \left(f_3 - \frac{f_1}{f_2}\right) dy_2^2 \right].$$

Ammettiamo che le condizioni di Routh-Hurwitz siano sempre soddisfatte. È allora $V > 0$, ed inoltre:

$$(9) \quad \frac{dV}{dt} = -f_2 \left(f_3 - \frac{f_1}{f_2}\right) y_3^2 < 0.$$

Rimane dunque dimostrato che anche per i sistemi del terz'ordine in cui $f_2/f_1 = \text{costante}$ (e quindi $a_2/a_1 = b_2/b_1$), sono applicabili i metodi di indagine della stabilità propri dei sistemi lineari.

3. Esaminiamo ora alcuni dei casi cosiddetti critici, ossia ai limiti della stabilità.

Siano ancora tutte le $f_i > 0$.

Per le equazioni del terz'ordine lineari ($f_i = \text{cost}$), si ha allora un caso critico solo quando è:

$$(10) \quad f_3 f_2 - f_1 = 0.$$

Se le f_i sono variabili, ma è soddisfatta una qualsiasi delle relazioni che assicurano la validità del procedimento di linearizzazione per lo studio della stabilità ($f_2 = \text{cost}$; $f_3 = \text{cost}$; $f_2/f_1 = \text{cost}$; $f_3/f_1 = \text{cost}$), allora possiamo dimostrare che i sistemi non lineari si comportano anche nel caso critico in modo analogo ai sistemi lineari.

Sia $f_2 = \text{cost}$; se vale la (10), è anche $f_1/f_3 = \text{cost}$.

La (1) può essere scritta:

$$(11) \quad \frac{d}{dt}(\dot{y} + f_2 y) + f_3(\dot{y} + f_2 y) = 0$$

ossia, ponendo $z = \dot{y} + f_2 y$,

$$(12) \quad \dot{z} + f_3 z = 0.$$

Essendo $f_3 > 0$, questa equazione è stabile (ved. [1]), e pertanto per $t \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 0$, e quindi, al limite, si ha:

$$(13) \quad \ddot{y} + f_2 \dot{y} = 0.$$

La (13) è l'equazione delle vibrazioni libere non smorzate di periodo $T = 2\pi/\sqrt{f_2}$. Si ha perciò una soluzione limite oscillatoria con periodo costante.

Si confronti questo risultato con quello relativo al caso lineare, in cui $f_i = f_i^* = \text{cost}$.

Se è realizzata la condizione (10), le radici caratteristiche dell'equazione (1) risultano:

$$\lambda_1 = i\sqrt{f_2^*} \quad ; \quad \lambda_2 = -i\sqrt{f_2^*} \quad ; \quad \lambda_3 = -f_3^*.$$

Il moto perturbato tende quindi asintoticamente ad una oscillazione libera non smorzata di periodo $T = 2\pi/\sqrt{f_2^*}$, come nel caso non lineare; la differenza è che nel caso lineare il transitorio ha luogo con coefficiente di smorzamento f_3^* costante.

Sia ora $f_3 = \text{costante}$; per la (10), è anche $f_2/f_1 = \text{costante}$. La (1) può essere scritta:

$$(15) \quad \frac{d^2}{dt^2}(\dot{y} + f_3 y) + f_2(\dot{y} + f_3 y) = 0.$$

Considerando la (14) come un'equazione di oscillazioni nella variabile $z = \dot{y} + f_3 y$, possiamo prendere come funzione di Liapunov delle coordinate lagrangiane l'energia totale del sistema oscillante:

$$(15) \quad V = \frac{1}{2} \left[\dot{z}^2 + \int_0^z f_2 dz^2 \right] = \frac{1}{2} \left[(\dot{y} + f_3 \dot{y})^2 + \int_0^{(\dot{y} + f_3 y)^2} f_2 d(\dot{y} + f_3 y)^2 \right] > 0.$$

Tenendo conto della (7), si ottiene derivando $\frac{dV}{dt} = 0$, e quindi $V = \text{costante}$.

Per ogni punto dello spazio delle fasi passa quindi una traiettoria che giace sempre sopra una superficie chiusa che racchiude l'origine; le soluzioni sono tutte orbitali.

È facile constatare che si hanno ancora soluzioni tutte orbitali quando l'equazione (1) è di ordine pari, e sono nulli i coefficienti f_i per i dispari; allora (ved. [1]) il sistema in esame può esser simulato da un analogo meccanico non lineare privo di smorzamento, e la funzione delle coordinate lagrangiane $V > 0$ là ricavata ha in questo caso una derivata dV/dt sempre nulla.

4. Ricaviamo ora alcune proprietà generali dei sistemi di regolazione non lineari, desumibili dall'esame dei corrispondenti sistemi linearizzati.

L'equazione (5) di un sistema di regolazione può essere scritta in forma di sistema come segue:

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{y}_i = y_{i+1} & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ \dot{y}_n = - \sum_{i=1}^n [a_i - b_i \varphi(x)] y_i \\ x = \sum_{i=1}^n b_i y_i. \end{cases}$$

I punti singolari (di equilibrio) del sistema, nello spazio delle y_i , si hanno dove le $\dot{y}_i$ si annullano tutte (ved. [4]). Le coordinate di tali punti valgono quindi:

$$(17) \quad \begin{cases} y_i = 0 & (i = 2, 3, \dots, n) \\ -a_1 y_1 + b_1 y_1 \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Quest'ultima uguaglianza è soddisfatta per $y_1 = 0$, $x = 0$, ed inoltre per:

$$-a_1 + b_1 \varphi(b_1 y_1) = 0.$$

Scriviamo ora il determinante caratteristico del sistema (15):

$$D = (-1)^n \left\{ \lambda^n + \sum_{i=1}^n [a_i - b_i \varphi(x)] \lambda^{i-1} \right\}.$$

Determiniamo, con il metodo di Poincaré, se l'origine è un punto di equilibrio stabile.

Il sistema deve essere allora linearizzato facendo tendere x a zero; quando ciò avviene, $\varphi(x)$ tende al valore $\varphi(0)$.

Perché vi sia stabilità in corrispondenza dell'origine, occorre che le radici di:

$$(18) \quad D_{(x=0)} = (-1)^n \left\{ \lambda^n + \sum_{i=1}^n [a_i - b_i \varphi(0)] \lambda^{i-1} \right\} = 0$$

abbiano tutte parte reale negativa.

Se le condizioni di Routh-Hurwitz sono soddisfatte per ogni $\varphi(x)$, $0 < \varphi(x) < c$, ciò è sempre vero; allora è anche, tra l'altro:

$$a_1 - b_1 \varphi(x) > 0$$

per ogni valore di $\varphi(x)$; non si ha quindi alcun punto singolare all'infuori dell'origine.

Se poi le radici di $D = 0$ (radici caratteristiche generalizzate) sono tutte reali (e negative), il sistema è stabile. È possibile riconoscere questo costruendo, con il procedimento passo-passo, una traiettoria passante per un punto qualsiasi P dello spazio delle fasi.

Ciò può farsi (ved. [5]) considerando costanti in un piccolo intervallo, ed uguali al valore che hanno in P , i coefficienti del sistema (16). Se le radici del determinante caratteristico sono sempre tutte negative, tutte le y decrescono (in valore assoluto) costantemente con il tempo; ovunque; inoltre, non essendovi altre posizioni di equilibrio al finito, tutte le y devono tendere a zero per $t \rightarrow \infty$.

Un caso particolare di quello ora considerato si ha con i sistemi di regolazione del prim'ordine. In essi, evidentemente, si ha solo una radice, reale, di $D = 0$. Il sistema è stabile se tale radice è negativa.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. ROMITI, *Studio della linearizzazione equivalente dei servomeccanismi non lineari mediante analoghi meccanici*, «Atti Acc. Scienze Torino», 2 (1963).
- [2] W. HAHN, *Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov*, Springer 1959.
- [3] S. LEFSCHETZ e J. LA SALLE, *Stability by Liapunov Direct Method*, Academic Press, 1961.
- [4] G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Cremonese, 1956.
- [5] W. KAPLAN, *Ordinary differential equations*, Addison-Wesley, 1958.