

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

GIOVANNI PROUSE

## Esempi tipici per l'equazione delle onde

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.2, p. 143–150.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1963\\_8\\_34\\_2\\_143\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_2_143_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Matematica.** — *Esempi tipici per l'equazione delle onde*<sup>(\*)</sup>. Nota di GIOVANNI PROUSE, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. L. AMERIO.

§ 1. Scopo della presente Nota è di mostrare come, nell'integrazione delle equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico e delle funzioni a valori in uno spazio hilbertiano, alcune proprietà di regolarità dei termini noti non si trasmettano alle funzioni incognite.

Si consideri, ad esempio, nell'intervallo  $J = (-\infty < t < +\infty)$ , l'equazione delle onde (in forma operativa)

$$(1.1) \quad x''(t) = Ax(t) + f(t).$$

Come è noto<sup>(1)</sup>, se  $f(t)$  è  $L^2$ -q.p., le soluzioni  $x(t)$  della (1.1), considerate come funzioni a valori nello spazio  $E$  dell'energia (corrispondente alla norma

$$(1.2) \quad \|x(t)\|_E = \{\|x(t)\|_{H_0^1}^2 + \|x'(t)\|_{L^2}^2\}^{1/2}$$

risultano  $E$ -q.p., se sono  $E$ -limitate.

Inoltre<sup>(2)</sup>, se  $f(t)$  è  $L^2$ -q. p. secondo Stepanoff, tutte le soluzioni  $x(t)$  tali che

$$\int_{-1/2}^{1/2} \|x(t+\eta)\|_E^2 d\eta \leq M < +\infty \quad (t \in J),$$

sono  $E$ -q.p. secondo Bohr.

Poiché una funzione q.p. è uniformemente continua ed ha la traiettoria relativamente compatta, è spontaneo domandarsi se tali ultime due proprietà, ammesse per il termine noto  $f(t)$ , si trasmettono alla soluzione  $x(t)$ , supposta limitata.

Ciò non avviene, e non solo per la (1.1), ma anche per l'analogo problema dell'integrazione delle funzioni continue a valori in uno spazio hilbertiano, come risulterà dagli esempi che riporteremo nei paragrafi 2 e 3.

*Faremo vedere, precisamente, che si può prendere  $f(t)$   $L^2$ -uniformemente continua e con traiettoria  $L^2$ -relativamente compatta, in modo che le soluzioni*

(\*) Istituto Matematico del Politecnico di Milano. Gruppo di ricerca n° 12 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1962-63. Durante lo svolgimento di questo lavoro, l'autore ha usufruito di una borsa di studio del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1963.

(1) L. AMERIO, *Problema misto e quasi-periodicità per l'equazione delle onde non omogenea*, « Ann. di Mat. » (IV), vol. XLIX (1960).

(2) Questo risultato è un caso particolare di teoremi più generali (cfr. A. VASCONI, *Sull'equazione delle onde con termine noto q. p. secondo Stepanoff*, in corso di stampa sui « Rend. Ist. Lomb. Sci. Lett. »; G. PROUSE, *Sulle equazioni differenziali astratte q. p. secondo Stepanoff* « Ric. di Mat. » vol. XI (1962)).

della (1.1) risultino E-limitate, ma non risultino uniformemente continue e neppure con traiettoria relativamente compatta, anche considerate nello spazio  $W_0$  definito dalla norma<sup>(3)</sup>

$$(1.3) \quad \|x(t)\|_{W_0} = \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \|x(t+\eta)\|_E^2 d\eta \right\}^{1/2}.$$

A maggior ragione, esistono quindi soluzioni E-limitate della (1.1) che non sono E-uniformemente continue e non hanno la traiettoria E-relativamente compatta, anche se  $f(t)$  è  $L^2$ -uniformemente continua ed ha la traiettoria  $L^2$ -relativamente compatta.

Analogamente, si può prendere  $f(t)$ , continua, a valori in uno spazio di Hilbert  $X$  e dotata di traiettoria relativamente compatta in modo che l'integrale  $F(t) = \int_0^t f(\eta) d\eta$  risulti  $X$ -limitato, ma non abbia traiettoria relativamente compatta nello spazio  $L_0^2(X)$ , con norma definita dalla relazione:

$$(1.4) \quad \|x(t)\|_{L_0^2(X)} = \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \|x(t+\eta)\|_X^2 d\eta \right\}^{1/2}.$$

Pertanto, lo stesso integrale non ha traiettoria  $X$ -relativamente compatta.

§ 2. Consideriamo anzitutto il problema dell'integrazione e poniamo

$$(2.1) \quad F(t) = \int_0^t f(\eta) d\eta.$$

Poiché  $f(t)$ , continua, ha traiettoria separabile, possiamo supporre senz'altro che lo spazio  $X$  sia separabile.

Sia  $\{y_n\}$  un sistema completo di vettori ortogonali e normati in  $X$ ; risulta allora:

$$(2.2) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n f_n(t) \quad , \quad f_n(t) = (f(t), y_n)_X.$$

Consideriamo la funzione  $f(t)$  definita ponendo:

$$(2.3) \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sin \frac{t}{n} & \text{per } t \in J_n \equiv [2n^2\pi, 2(n^2+n)\pi] \\ 0 & \text{per } t \notin J_n \end{cases}$$

È evidente che risulta  $J_m \cap J_n = \emptyset$  per  $m \neq n$  ed inoltre  $2(n+1)^2\pi > 2(n^2+n)\pi + 1$ .

(3) Per maggiori dettagli sulla definizione dello spazio  $W_0$  (che si introduce per studiare le soluzioni q. p. nel senso di Stepanoff), cfr. L. AMERIO, *Sulle equazioni lineari quasi-periodiche negli spazi hilbertiani*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XXXI (1961).

Risulta inoltre

$$\int_{2n^2\pi}^{2(n^2+n)\pi} \frac{1}{n} \sin \frac{t}{n} dt = \left[ -\cos \frac{t}{n} \right]_{2n^2\pi}^{2(n^2+n)\pi} = 0$$

e quindi:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} F(t) &= \sum_1^\infty y_n \int_0^t f_n(\eta) d\eta = 0 \quad \text{per } t \notin \bigcup_p J_p \\ F(t) &= y_p \int_{2p^2\pi}^t f_p(\eta) d\eta \quad \text{per } t \in J_p. \end{aligned}$$

Si può facilmente constatare che la funzione  $f(t)$  definita mediante le (2.2), (2.3) ha traiettoria relativamente compatta. Risulta infatti, per  $t \in J$ :

$$(2.5) \quad \left\{ \sum_p^\infty |f_n(t)|^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{1}{p}$$

e la serie  $\left\{ \sum_1^\infty |f_n(t)|^2 \right\}^{1/2} = \|f(t)\|_X$  converge perciò uniformemente in  $J$ .

Per un noto criterio, essendo  $f_n(t)$  ed  $f(t)$  limitate in  $J$ , la traiettoria di  $f(t)$  risulta allora relativamente compatta.

Si ha inoltre, se  $t \in J_p$ :

$$(2.6) \quad \|F(t)\|_X = \left\{ \sum_1^\infty \left[ \int_0^t f_n(\eta) d\eta \right]^2 \right\}^{1/2} = \int_{2p^2\pi}^t \frac{1}{p} \sin \frac{\eta}{p} d\eta \leq \int_{2p^2\pi}^{2p^2\pi + p\pi} \frac{1}{p} \sin \frac{\eta}{p} d\eta = 2$$

e, di conseguenza, per le (2.4),

$$(2.7) \quad \sup_{t \in J} \|F(t)\|_X = 2,$$

cioè  $F(t)$  è limitata.

Risulta d'altra parte, per  $2n^2\pi + \frac{1}{2}n\pi \leq t \leq 2n^2\pi + \frac{3}{2}n\pi$ ,

$$(2.8) \quad F_n(t) = \int_0^t f_n(\eta) d\eta = \int_{2n^2\pi}^t \frac{1}{n} \sin \frac{\eta}{n} d\eta = 1 - \cos \frac{t}{n} \geq 1$$

e perciò, considerando l'intervallo  $|2n^2\pi + n\pi - \eta| \leq \frac{1}{2}$ ,

$$(2.9) \quad \int_{-1/2}^{1/2} F_n^2(2n^2\pi + n\pi + \eta) d\eta \geq 1.$$

Ne segue che la serie

$$(2.10) \quad \sum_1^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} F_n^2(t + \eta) d\eta = \|F(t)\|_{L_0^2(X)}^2$$

non converge uniformemente in  $J$ . La traiettoria di  $F(t)$  non è quindi  $L_0^2(X)$ -relativamente compatta.

§ 3. Esaminiamo ora l'equazione delle onde (1.1). Siano  $y_n$  le autosoluzioni dell'operatore  $A$  e  $\lambda_n$  i corrispondenti autovalori.

Come è noto, è

$$(3.1) \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Consideriamo la soluzione della (1.1) soddisfacente alle condizioni iniziali:

$$(3.2) \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Essa è data dalla formula

$$(3.3) \quad x(t) = \sum_1^{\infty} \frac{y_n}{\lambda_n} \int_0^t f_n(\eta) \sin \lambda_n(t - \eta) d\eta$$

e risulta:

$$(3.4) \quad x'(t) = \sum_1^{\infty} y_n \int_0^t f_n(\eta) \cos \lambda_n(t - \eta) d\eta,$$

dove

$$(3.5) \quad f_n(t) = (f(t), y_n)_{L^2}, \quad f(t) = \sum_1^{\infty} y_n f_n(t).$$

Poniamo ora  $k_1 = [\lambda_1^2] + 1$  e, successivamente:

$$(3.6) \quad k_{n+1} = \left[ k_n \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + 2\lambda_{n+1}^2 + \lambda_{n+1} + 1 \right] \quad (n > 1).$$

Poniamo inoltre

$$(3.7) \quad h_n = [\lambda_n^2].$$

Dalla (3.6) segue

$$(3.8) \quad k_{n+1} > k_n \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + 2\lambda_{n+1}^2 + \lambda_{n+1} \geq k_n \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} + 2[\lambda_{n+1}] \lambda_{n+1} + \lambda_{n+1}.$$

Si ha quindi, per le (3.7), (3.8):

$$(3.9) \quad \frac{k_{n+1}}{\lambda_{n+1}} - \frac{k_n}{\lambda_n} \geq 2[\lambda_{n+1}] + 1 \geq [\lambda_{n+1}] + [\lambda_n] + 1 \geq \frac{h_{n+1}}{\lambda_{n+1}} + \frac{h_n}{\lambda_n} + 1.$$

Dalla (3.9) si deduce che, se si considerano sull'asse  $t$  i segmenti  $J_n = \left[ \frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi, \frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi \right]$  l'intersezione  $J_m \cap J_n$  risulta vuota, per  $m \neq n$ , e si ha  $\frac{k_{n+1} - h_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \geq \frac{k_n + h_n}{\lambda_n} + 1$ .

Posto

$$(3.10) \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n t & \text{per } \frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \\ -\frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n t & \text{per } \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi \\ 0 & \text{per } t \notin J_n \end{cases}$$

si può facilmente constatare che la corrispondente funzione  $f(t)$  è  $L^2$ -uniformemente continua ed ha la traiettoria  $L^2$ -relativamente compatta.

Si ha infatti, per  $t \in J$ :

$$(3.11) \quad \left\{ \sum_p^\infty |f_n(t)|^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{1}{\lambda_p}.$$

Poiché  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_p} = 0$ , la serie  $\sum_n |f_n(t)|^2 = \|f(t)\|_{L^2}^2$  converge uniformemente in  $J$  ed  $f(t)$  è quindi  $L^2$ -uniformemente continua in  $J$  ed ha traiettoria relativamente compatta.

*Dimostriamo che la soluzione  $x(t)$  della (1.1) corrispondente alle condizioni iniziali (3.2) ed al termine noto (3.10) (che, come si farà vedere in seguito, risulta E-limitata in  $J$ ) non è  $W_0$ -uniformemente continua e non ha la traiettoria  $W_0$ -relativamente compatta.*

Basterà, per questo, far vedere che la funzione  $x'(t)$ , a valori nello spazio  $L_0^2(L^2)$  con norma definita dalla relazione

$$(3.12) \quad \|x'(t)\|_{L_0^2(L^2)} = \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \|x'(t+\eta)\|_{L^2}^2 d\eta \right\}^{1/2}$$

non risulta uniformemente continua e non ha la traiettoria relativamente compatta.

Poniamo:

$$(3.13) \quad x'(t) = v_1(t) + v_2(t) = \sum_n y_n \cos \lambda_n t \int_0^t f_n(\eta) \cos \lambda_n \eta d\eta + \\ + \sum_n y_n \sin \lambda_n t \int_0^t f_n(\eta) \sin \lambda_n \eta d\eta = \sum_n y_n \psi_n(t) \cos \lambda_n t + \sum_n y_n \varphi_n(t) \sin \lambda_n t.$$

Risulta, per la (3.10)

$$(3.14) \quad \psi_n(t) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2\lambda_n t}{4\lambda_n^2} & \text{per } \frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \\ 0 & \text{per } t = \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \\ -\frac{1 - \cos 2\lambda_n t}{4\lambda_n^2} & \text{per } \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi \\ 0 & \text{per } t \notin J_n \end{cases}$$

ed inoltre:

$$(3.15) \quad \varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda_n} \left\{ t - \frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi - \frac{\sin 2\lambda_n t}{2\lambda_n} \right\} & \text{per } \frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \\ \frac{h_n \pi}{\lambda_n^2} & \text{per } t = \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \\ -\frac{1}{2\lambda_n} \left\{ t - \frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi - \frac{\sin 2\lambda_n t}{2\lambda_n} \right\} & \text{per } \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi \\ 0 & \text{per } t \notin J_n. \end{cases}$$

Si ha quindi

$$(3.16) \quad |\psi_n(t)| \leq \frac{1}{2\lambda_n^2}$$

e, di conseguenza, per  $t \in J$ :

$$(3.17) \quad \left\{ \sum_p^\infty |\psi_n^2(t) \cos^2 \lambda_n t| \right\}^{1/2} \leq \frac{1}{2\lambda_p^2}.$$

La serie  $\sum_n |\psi_n^2(t) \cos^2 \lambda_n t| = \|\psi_1(t)\|_{L^2}^2$  converge allora uniformemente in  $J$  e la funzione  $\psi_1(t)$  risulta perciò  $L^2$ -uniformemente continua ed ha la traiettoria  $L^2$ -relativamente compatta.

Per la (3.15) è d'altra parte:

$$(3.18) \quad 0 \leq \varphi_n(t) \leq \varphi_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi\right) = \frac{h_n}{\lambda_n^2} \pi$$

e risulta ovviamente

$$(3.19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n\left(\frac{h_n}{\lambda_n^2} \pi\right) = \pi,$$

$$(3.20) \quad \sup_{t \in J} |\varphi_n(t)| = \pi.$$

Si ha inoltre, per  $\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi - \frac{h_n}{\lambda_n} \pi \leq t \leq \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \frac{h_n}{\lambda_n} \pi$ , tenendo presente la (3.15):

$$(3.21) \quad \varphi_n(t) \geq \varphi_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi - \frac{h_n}{\lambda_n} \pi\right) = \frac{h_n}{\lambda_n^2} \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{4},$$

per  $n \geq n_1$  abbastanza grande.

Osserviamo d'altra parte che è, per  $t \in J$ ,

$$(3.22) \quad |\varphi'_n(t)| \leq \frac{1}{\lambda_n} \sin^2 \lambda_n t \leq \frac{1}{\lambda_n} \leq 1,$$

per  $n \geq n_2$  abbastanza grande.

Risulta poi, in virtù delle (3.20), (3.22), per  $n \geq n_2$ :

$$(3.23) \quad \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \varphi_n\left(t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n}\right) \sin \lambda_n\left(t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n}\right) - \varphi_n(t + \eta) \sin \lambda_n(t + \eta) \right]^2 d\eta = \\ = \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ \left[ \varphi_n\left(t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n}\right) - \varphi_n(t + \eta) \right] \sin \lambda_n(t + \eta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \sin \lambda_n \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \sin \lambda_n (t + \eta) \right] \varphi_n \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) \Big\}^2 d\eta \geq \\
& \geq \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ \left[ \sin \lambda_n \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \sin \lambda_n (t + \eta) \right]^2 \varphi_n^2 \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) + \right. \\
& - \left[ \varphi_n \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \varphi_n (t + \eta) \right]^2 \sin^2 \lambda_n (t + \eta) + \\
& - \left. 2 \left[ \sin \lambda_n \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \sin \lambda_n (t + \eta) \right] \left[ \varphi_n \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \varphi_n (t + \eta) \right] \cdot \right. \\
& \quad \cdot \varphi_n \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) \sin \lambda_n (t + \eta) \Big\} d\eta \geq \\
& \geq \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ \left[ \sin \lambda_n \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \sin \lambda_n (t + \eta) \right]^2 \varphi_n^2 \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_n} \right\} d\eta.
\end{aligned}$$

In virtù della definizione degli intervalli  $J_n$ , la ampiezza di tali intervalli (che è uguale a  $\frac{h_n}{\lambda_n} 4\pi$ ) tende a  $+\infty$  con  $n$ ; è perciò possibile determinare un indice  $n_3$  tale che, per  $n \geq n_3$ , risulti  $\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{1}{2} \leq \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \frac{h_n}{\lambda_n} \pi$ .

Posto  $n_4 = \max(n_1, n_2, n_3)$ , si ha allora, per  $n \geq n_4$ , tenendo presente la (3.21):

$$\begin{aligned}
(3.24) \quad & \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \sin \lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \sin \lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta \right) \right]^2 \varphi_n^2 \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) d\eta \geq \\
& \geq \frac{\pi^2}{16} \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \sin \lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \sin \lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta \right) \right]^2 d\eta = \\
& = \frac{\pi^2}{4} \int_{-1/2}^{1/2} \cos^2 \left( \lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta \right) + \frac{\pi}{2} \right) \sin^2 \frac{\pi}{2} d\eta = \\
& = \frac{\pi^2}{8} \left[ \eta + \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2\lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta + \frac{\pi}{2\lambda_n} \right) \right]_{-1/2}^{1/2} \geq \frac{\pi^2}{4} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_n} \right).
\end{aligned}$$

Dalle (3.23), (3.24) segue quindi

$$\begin{aligned}
(3.25) \quad & \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \varphi_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) \sin \lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \right. \\
& - \left. \varphi_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta \right) \sin \lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta \right) \right]^2 d\eta \geq \frac{\pi^2}{4} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_n} \right) - \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_n} \geq \frac{\pi^2}{16},
\end{aligned}$$

per  $n \geq n_5 \geq n_4$  abbastanza grande.

Si ha dunque

$$(3.26) \quad \sup_{t \in J} \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \varphi_n \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) \sin \lambda_n \left( t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) - \varphi_n(t + \eta) \sin \lambda_n(t + \eta) \right]^2 d\eta \geq \frac{\pi^2}{16}$$

e perciò, poiché  $\frac{\pi}{\lambda_n} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ , la funzione  $v_2(t)$  non è  $L^2_0(L^2)$ -uniformemente continua in  $J$ . Per quanto si è dimostrato sopra, anche la funzione  $x'(t)$  non è quindi  $L^2_0(L^2)$ -uniformemente continua in  $J$ .

Dimostriamo che la traiettoria di  $v_2(t)$  non è  $L^2_0(L^2)$ -relativamente compatta.

Si ha infatti, per la (3.21), per  $n \geq n_6 \geq n_1$ , abbastanza grande:

$$(3.27) \quad \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_n^2 \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta \right) \sin^2 \lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta \right) d\eta \geq \frac{\pi^2}{16} \int_{-1/2}^{1/2} \sin^2 \lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta \right) d\eta =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \left[ \frac{\eta}{2} - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n \left( \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta \right) \right]_{-1/2}^{1/2} \geq \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi^2}{32\lambda_n} \geq \frac{\pi^2}{64}$$

Risulta quindi, per  $p \geq n_6$ :

$$(3.28) \quad \sum_p \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_p^2 \left( \frac{k_p}{\lambda_p} 2\pi + \eta \right) \sin^2 \lambda_p \left( \frac{k_p}{\lambda_p} 2\pi + \eta \right) d\eta \geq \frac{\pi^2}{64}.$$

La serie

$$(3.29) \quad \sum_1^\infty \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_n^2(t + \eta) \sin^2 \lambda_n(t + \eta) d\eta = \|v_2(t)\|_{L^2_0(L^2)}^2$$

non converge perciò uniformemente in  $J$  e la funzione  $v_2(t)$  non ha di conseguenza la traiettoria  $L^2_0(L^2)$ -relativamente compatta.

Facciamo, da ultimo, vedere che la soluzione  $x(t)$  considerata risulta E-limitata in  $J$ .

Si ha infatti, per le (3.3), (3.4), (3.13), (3.14), (3.15),

$$(3.30) \quad \|x(t)\|_E^2 = \sum_1^\infty \{(\psi_n(t) \sin \lambda_n t - \varphi_n(t) \cos \lambda_n t)^2 + (\varphi_n(t) \sin \lambda_n t + \psi_n(t) \cos \lambda_n t)^2\}$$

e quindi, tenendo presenti le (3.16), (3.20),

$$(3.31) \quad \|x(t)\|_E^2 = \begin{cases} 0 & \text{per } t \notin \bigcup_p J_p, \\ \psi_p^2(t) + \varphi_p^2(t) \leq \frac{1}{4\lambda_p^2} + \pi^2 & \text{per } t \in J_p. \end{cases}$$

Abbiamo perciò dimostrato che la soluzione  $x(t)$ , E-limitata in  $J$ , corrispondente al termine noto  $f(t)$ , dato dalle (3.5), (3.10),  $L^2$ -uniformemente continuo ed a traiettoria  $L^2$ -relativamente compatta, non è  $W_0$ -uniformemente continua in  $J$  e non ha la traiettoria  $W_0$ -relativamente compatta.