Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

José Sebastião e Silva

Les espaces à bornés et les réunions d'espaces normés

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.2, p. 134–137.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_2_134_0¿

Matematica. — *Les espaces à bornés et les réunions d'espaces normés.* Nota di JOSÉ SEBASTIÃO e SILVA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Lorsque, en 1946, nous avons entrepris la mise au point moderne de la théorie des fonctionnelles analytiques de Fantappiè (cf. [6], [7], [8]), ne connaissant pas encore la théorie des espaces vectoriels topologiques, nous avons dû employer la notion très simple de « réunion d'espaces normés », qui se révélait parfaitement suffisante, dans la mesure où nous en avions besoin pour les développements et les applications de la théorie.

Peu de temps après la publication de notre thèse [7] et d'un autre travail qui la suivit [8], plusieurs mathématiciens, à peu près simultanément et de façon indépendante, ont pu reformuler notre systématisation en termes d'espaces localement convexes (cf. [4] et [2]). La théorie qui en a résulté reste encore aujourd'hui, à côté de la théorie des distributions, comme un des deux exemples déjà classiques d'analyse fonctionnelle concrète, où s'applique la théorie des espaces vectoriels topologiques (cf. [1], Note historique).

En 1954, en nous occupant de la construction axiomatique de la théorie des distributions, nous nous sommes aperçus que les espaces non métrisables qui interviennent fondamentalement dans ces deux branches de l'analyse fonctionnelle appartiennent à une catégorie très spéciale d'espaces localement convexes, que nous avons alors nommés « espaces ($\mathfrak{LN}^*$) » [11] et dont l'étude a été approfondie par plusieurs mathématiciens (cf. [17]). Il s'agit de limites inductives (au fond, *réunions*) de certaines suites d'espaces normés. Dans nos recherches ultérieures sur le calcul symbolique et sur les ultra-distributions, nous avons trouvé partout des espaces appartenant à cette catégorie. Ces espaces s'identifient d'ailleurs aux duals forts des espaces de Schwartz métrisables et c'est pourquoi nous les avons appelés après « espaces ($\mathfrak{S}_2$) » ; M. Yoshinaga et d'autres mathématiciens les appellent « espaces de Silva ».

Toutefois, en 1960, deux faits bien intéressants se sont révélés :

D'une part, M. Mikusiński, en essayant de construire une théorie élémentaire des distributions vectorielles, suffisante pour beaucoup des applications, a trouvé l'avantage de remplacer, à cet effet, la notion d'*espace localement convexe* par celle de *réunion d'espaces normés* [5].

D'autre part, M. Waelbroeck, dans le Colloque sur l'Analyse Fonctionelle tenu à Louvain en 1960, a fait remarquer l'avantage de remplacer, dans les recherches sur le calcul symbolique, la notion d'*espace localement convexe*, par celle, beaucoup plus simple et plus maniable, d'*espace à bornés* (cf. [15] et [16]). Peu de temps après, nous avons pu faire nous même la contre–

(*) Nella seduta del 9 febbraio 1963.

épreuve de cet avantage, dans un travail sur le calcul symbolique (cf. [14]). En vérité, l'emploi des espaces localement convexes pose des problèmes de plus en plus difficiles, qui n'ont rien à faire avec les buts essentiels du calcul symbolique.

Mais le plus curieux encore est que:

1° *La notion de « réunion d'espaces normés » employée par M. Mikusiński est exactement la même que nous avions utilisée dans la période 1946–1950* (il est évident que M. Mikusiński ne connaissait pas, au moins en détail, ces travaux).

2° *La notion d'espace à bornés est équivalente à celle de réunion d'espaces normés* (légèrement modifiée).

C'est ce que nous allons montrer dans cette Note.

On a donc ainsi assisté à une sorte de « retour au passé ». Mais cela ne signifie nullement que la théorie des espaces localement convexes devienne superflue; nous y reviendrons à la fin de cette Note, à propos de la théorie non élémentaire des distributions vectorielles.

2. RÉUNION D'ESPACES NORMÉS. – Cette notion peut se définir comme il suit:

Soit $\mathfrak{E}$ une famille quelconque d'espaces normés E, réels ou complexes, vérifiant les deux conditions suivantes:

(i) Si $E_\alpha \subset E_\beta$, E_α est un sous-espace vectoriel de E_β et la topologie, $\mathfrak{T}_\beta$, de E_β induit dans E_α une topologie moins fine que la topologie, $\mathfrak{T}_\alpha$, de E_α.

(*ii*) Pour tout couple d'espaces E_α, E_β de la famille $\mathfrak{E}$, il existe un espace $E_\gamma \in \mathfrak{E}$ tel, que $E_\alpha \cap E_\beta \subset E_\gamma$.

Cela étant, désignons par E l'ensemble réunion des ensembles E_α, muni des notions suivantes:

S o m m e. – On appelle *somme de deux éléments* u, v *de* E la somme $u + v$ de u et v dans n'importe quel espace $E_\alpha \in E$ tel que $u, v \in E_\alpha$.

P r o d u i t p a r s c a l a i r e s. – On appelle *produit d'un scalaire* λ *par un élément* u *de* E le produit λu de λ par u dans n'importe quel espace E_α tel que $u \in E_\alpha$.

L i m i t e d ' u n e s u i t e. – On dit qu'*une suite d'élément* u_n *de* E *converge vers un élément* v *de* E, s'il existe au moins un espace $E_\alpha \in E$ tel que: 1) $u_n \in E_\alpha$, pour tout n, et $v \in E_\alpha$; 2) u_n converge vers v suivant la topologie $\mathfrak{T}_\alpha$.

Alors, E devient un espace vectoriel muni d'une notion de limite, compatible avec sa structure d'espace vectoriel: on l'appelle *espace réunion des espaces normés* E_α.

Outre la notion de « limite d'une suite » il est naturel de considérer dans E la notion suivante:

E n s e m b l e b o r n é. – On dit qu'un ensemble $H \subset E$ est *borné*, s'il existe au moins un espace $E_\alpha \in \mathfrak{E}$ tel que H est contenu dans E et borné suivant la norme de E_α.

La notion de limite d'une suite peut être définie dans E en termes de « ensemble normé », comme il suit:

On dit qu'une suite d'éléments u_n de E tend vers un élément v de E, s'il existe au moins un borné B de E tel que, à tout $\delta > 0$, correspond un p de façon que $n > p$ implique $u_n - v \in \delta B$.

Réciproquement, *si* E *peut être obtenu comme réunion d'une suite d'espaces normés* E_n, on pourra définir « ensemble borné » en termes de « limite d'une suite » et de « produit par scalaires »:

On dit qu'un ensemble $H \subset E$ est borné, si, quelle que soit la suite d'éléments u_n de H, on a $\frac{1}{n} u_n \to 0$.

Dans le cas général, il serait nécessaire de modifier la définition de « espace réunion d'espaces normés », en remplaçant la notion de « limite d'une suite » par celle, plus générale mais analogue, de « limite d'un filtre ». Cela conduirait à une structure de *espace vectoriel pseudo-topologique*, où la notion de borné est exprimable en termes de cette structure.

3. ESPACE À BORNÉS. – D'après Waelbroeck, on appelle espace à bornés tout espace vectoriel E, réel ou complexe, où l'on ait fixé une famille $\mathfrak{B}$ de parties de E, dites « bornées », vérifiant les conditions suivantes:

a) *Tout ensemble formé d'un seul élément de* E *appartient à* $\mathfrak{B}$;

b) *Toute réunion finie d'ensemble de* $\mathfrak{B}$ *appartient aussi à* $\mathfrak{B}$;

c) *Si* $B \in \mathfrak{B}$, *l'enveloppe convexe cerclée de* B *appartient aussi à* $\mathfrak{B}$ *ainsi que toute partie de* B *et tout homothétique de* B;

d) *Aucun sous-espace vectoriel non nul de* E *appartient à* $\mathfrak{B}$.

On vérifie immédiatement que tout espace E réunion d'espaces normés E_α est un espace à bornés, si l'on définit « ensemble borné » dans E, comme nous l'avons indiqué.

Réciproquement, soit E un espace à bornés $\mathfrak{B}$. Si, pour tout $B \in \mathfrak{B}$ convexe cerclé, on désigne par E_B le sous-espace vectoriel de E engendré par B, muni de la norme qui résulte de prendre B pour boule unité, on voit, en tenant compte des axiomes a)–d), que E s'identifie à l'espace réunion des espaces normés E_B. Ainsi l'équivalence que nous avons annoncée est établie.

En particulier, un espace E à bornés $\mathfrak{B}$ est dit complet, si, pour tout $B \in \mathfrak{B}$, il existe $C \in \mathfrak{B}$, tel que l'on a $B \subset C$ et que l'espace E_C est complet; cela équivaut évidemment à dire que E peut s'exprimer comme *espace réunion d'espaces de Banach*.

Comme l'a montré Waelbroeck, les catégories des espace localement convexes et des espaces à bornés ne sont pas contenues l'une dans l'autre: leur intersection est la catégorie des espaces l. c. bornologiques.

Cependant, il est à remarquer que, même dans ce dernier cas, la notion de limite d'une suite, définie en termes de « bornés », comme nous l'avons indiqué au n° 2, est en général plus forte que la convergence au sens de la topologie de l'espace: il s'agit alors de la *convergence au sens de Mackey*. Mais ces deux types de convergence coïncident dans des catégories importantes d'espaces bornologiques: *par exemple, les espaces* $(\mathfrak{S}_2)$ *et les espaces métrisables* (cf. [3], p. 106).

On peut évidemment définir « réunion d'espaces à bornés » à peu près comme l'on a fait pour les espaces normés : le résultat est encore un espace à bornés, donc une réunion d'espaces normés. Cette propriété de permanence explique en partie le succès de la notion d'espace à bornés dans un grand nómbre d'applications.

Toutefois, dans certains problèmes fins d'analyse fonctionnelles – par exemple, la recherche des applications linéaires continues de l'espace $\mathfrak{D}$ (des fonctions indéfiniment dérivables à support borné sur R^n) dans un espace l. c., même bornologique (v. g. l'espace $\mathfrak{D}$ lui–même) – la théorie des espaces localement convexes s'impose, en général, d'une telle façon, que l'on ne peut plus la remplacer par une théorie *ersatz*, comme celle des espaces à bornés (cf. [12]).

BIBLIOGRAFIA.

[1] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, « Act. Scient. Ind. », n. 1229 (1955), Hermann, Paris.

[2] A. GROTHENDIECK, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes* « J. Reine Angew. Math. », *192*, pp. 35–64, 77–95 (1953).

[3] — *Sur les espaces* (F) *et* (DF), « Summa Brasiliensis Mathematicae », *3*, pp. 57–122 (1954).

[4] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*, « J. Reine Angew. Math. », *191*, pp. 29–49 (1953).

[5] J. MIKUSIŃSKI, *Distributions à valeurs dans les réunions d'espaces de Banach*, « Studia Math. », *19*, pp. 251–285 (1960).

[6] J. SEBASTIÃO E SILVA, *L'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche*, « Mem. Acc. Lincei » (8), *1*, pp. 207–240 (1947).

[7] — *As funções analíticas e a análise funcional*, Thèse, 1948. « Portugaliae Math. », *9*, pp. 1–130 (1950).

[8] — *Sobre a topologia dos espaços funcionais analíticos*, « Rev. Fac. Ciências Lisboa » (2 A), *1*, pp. 23–102 (1950).

[9] — *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, « Portugaliae Math. », *12*, pp. 1–46 (1953).

[10] — *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*, « Rev. Fac. Ciencias Lisboa » (2 A), *4*, pp. 79–186 (1954–55).

[11] — *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, « Rend. Mat. Univ. Roma » (5), *14*, pp. 388–410 (1955).

[12] — *Sur la définition et la structure des distributions vectorielles*, « Portugaliae Math. », *19*, pp. 1–80 (1960).

[13] — *Les espaces à bornés et la notion de fonction différentiable*, Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle du C.B.R.M. à Louvain (1961).

[14] — *Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables à spectre vide on non borné*, « Annali Math. Pura ed. App. » (4), *58*, pp. 219–276 (1962).

[15] L. WAELBROECK, *Étude spéctrale des algèbres complètes*, « Mém. Acad. R. de Belgique », *31*, pp. 1–142 (1960).

[16] — *Les espaces à bornés complets*, Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle du C.B.R.M., Louvain (1961).

[17] K. YOSHINAGA, *On a locally convex space introduced by J. S. e Silva*, « J. Sc. Hiroshima Univ. » (A), *21*, pp. 89–98 (1957).