Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

András Kósa

Un criterio sufficiente per il minimo assoluto nel caso in cui l'integrale dipende anchè dalle derivate di ordine superiore delle funzioni ammissibili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.2, p. 130–133.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_2_130_0¿

Analisi matematica. — *Un criterio sufficiente per il minimo assoluto nel caso in cui l'integrale dipende anche dalle derivate di ordine superiore delle funzioni ammissibili.* Nota di ANDRÁS KÓSA, presentata [(*)] dal Socio M. PICONE.

Nella Nota presente daremo un criterio sufficiente, nell'indirizzo del Picone [(1)], per il minimo assoluto d'un integrale unidimensionale che dipende anche dalle derivate di ordine superiore delle funzioni ammissibili.

Cominciamo con introdurre le notazioni seguenti:

1° sia $\bar{y}(x)$ una funzione continua insieme alle sue derivate fino all'ordine n nell'intervallo $[a, b]$ (n è un intero positivo arbitrariamente fissato);

2° siano $\rho_i'(x)$, $\rho_i''(x)$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ funzioni definite nell'intervallo $[a, b]$, potendo divenire o essere sempre infinite e verificanti le condizioni:

$$\left.\begin{array}{lll} \rho_i'(x) \geq 0 \quad , \quad \rho_i''(x) \geq 0 & \text{per } x \in [a, b] \\ \rho_i'(x) + \rho_i''(x) > 0 & \text{per } x \in (a, b) \end{array}\right\} \quad i = 0, 1, \cdots, n-1;$$

3° sia T il dominio dello spazio a $n+1$ dimensioni, con le coordinate $(x, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$, per il quale valgono le limitazioni:

$$a \leq x \leq b \quad ; \quad \bar{y}^{(i)}(x) - \rho_i'(x) \leq y_i \leq \bar{y}^{(i)}(x) + \rho_i''(x) \text{ [(2)]} \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1);$$

4° sia G un insieme di numeri reali y_n;

5° sia $E(T \times G)$ l'insieme delle funzioni $y(x)$, dette ammissibili, definite nell'intervallo $[a, b]$, ivi continue insieme alle loro derivate fino all'ordine n e verificanti le seguenti relazioni:

$$y^{(i)}(a) = \bar{y}^{(i)}(a) \quad , \quad y^{(i)}(b) = \bar{y}^{(i)}(b) , \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1;$$

$$(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) \in T \times G \quad \text{per } x \in [a, b];$$

6° sia $f(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ una funzione continua nell'insieme $T \times G$.

(*) Nella seduta del 9 febbraio 1963.

(1) Ved. M. PICONE, *Su un criterio sufficiente in un classico problema di calcolo delle variazioni*, « Atti Acc. Naz. Lincei », *28*, fasc. 2 (1960); *Su un criterio sufficiente in un classico problema di calcolo delle variazioni*, « Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino », vol. 94 (1959–60); *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale unidimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, « Atti della Acc. Naz. Lincei, Memorie », vol. VI (1961); *Nuovi criteri sufficienti in un classico problema di calcolo delle variazioni*, « Annali di Mat. pura ed applicata » (IV), vol. LIII, pp. 119–138; *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale bidimensionale del second'ordine nello scalare minimante e conseguenti limitazioni per gli autovalori di un parametro da cui dipende un'equazione euleriana a derivate parziali del quart'ordine*, « Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino », vol. 95 (1960–61); *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, « Atti dell'Acc. Naz. Lincei, Memorie », vol. VI (1962). – A. KÓSA, *Un criterio sufficiente per il minimo assoluto nel caso di estremi variabili*, « Atti dell'Acc. Naz. Lincei », *30*, fasc. 5 (1961); *Un criterio sufficiente per il minimo assoluto degli integrali doppi nel caso di contorno variabile*, « Atti della Acc. Naz. Lincei », *30*, fasc. 6 (1961).

(2) La derivata 0-esima significa sempre la funzione stessa.

È evidente che il funzionale

$$(1) \qquad \mathrm{I}\,[y(x)] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x))\, \mathrm{d}x$$

è definito per tutte le funzioni $y(x) \in \mathrm{E}\,(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$.

Si dice che la funzione $\bar{y}(x)$ [3] minimizza il funzionale (1) in $\mathrm{E}\,(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$, se per tutte le funzioni $y(x) \in \mathrm{E}\,(\mathrm{T}\times\mathrm{G})$ vale la disuguaglianza $\mathrm{I}\,[y(x)] \geq \mathrm{I}\,[\bar{y}(x)]$.

Per arrivare ad una condizione sufficiente relativamente al problema sopra esposto, si prendano, in primo luogo, n funzioni di due variabili

$$\mathrm{A}^1(x, y_0), \mathrm{A}^2(x, y_1), \cdots, \mathrm{A}^n(x, y_{n-1})$$

con la sola condizione che la i–esima di queste funzioni sia definita nell'insieme

$$(2) \qquad a \leq x \leq b \quad , \quad \bar{y}^{(i-1)}(x) - \rho'_{i-1}(x) \leq y_{i-1} \leq \bar{y}^{(i-1)}(x) + \rho''_{i-1}(x)$$

e vi sia continua con la derivata parziale $\mathrm{A}^i_x(x, y_{i-1})$ $(i = 1, \cdots, n)$.

Prendiamo poi la funzione

$$\mathrm{A}(x, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) = \alpha(x) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\bar{y}^{(i-1)}(x)}^{y_{i-1}} \mathrm{A}^i_x(x, t)\, \mathrm{d}t,$$

con

$$\alpha(x) = f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \cdots, \bar{y}^{(n)}(x)) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}^i(x, \bar{y}^{(i-1)}(x))\, \bar{y}^{(i)}(x).$$

La funzione A è definita e continua in T, dove esistono le derivate parziali

$$\mathrm{A}_{y_0}, \mathrm{A}_{y_1}, \cdots, \mathrm{A}_{y_{n-1}},$$

che soddisfano le identità:

$$(3) \qquad \mathrm{A}_{y_0} \equiv \mathrm{A}^1_x, \mathrm{A}_{y_1} \equiv \mathrm{A}^2_x, \cdots, \mathrm{A}_{y_{n-1}} \equiv \mathrm{A}^n_x.$$

Siccome A^i non dipende da y_j $(j \neq i-1)$, considerando anche la (3), l'integrale

$$\int \mathrm{A}\, \mathrm{d}x + \mathrm{A}^1\, \mathrm{d}y_0 + \mathrm{A}^2\, \mathrm{d}y_1 + \cdots + \mathrm{A}^n\, \mathrm{d}y_{n-1}$$

preso sulla curva

$$(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x))$$

(3) Evidentemente $\bar{y}(x) \in \mathrm{E}\,(\mathrm{T} \times \mathrm{G})$.

non dipende dalla scelta della funzione $y(x) \in \mathrm{E}(\mathrm{T} \times \mathrm{G})$ e ha il valore seguente:

$$\mathrm{I}^*[y(x)] = \int_a^b \Big\{ f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \cdots, \bar{y}^{(n)}(x)) - \sum_{i=1}^n \mathrm{A}^i(x, \bar{y}^{(i-1)}(x))\bar{y}^{(i)}(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \mathrm{A}^i(x, y^{(i-1)}(x))\, y^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^n \int_{\bar{y}^{(i-1)}(x)}^{y^{(i-1)}(x)} \mathrm{A}_x^i(x, t)\, \mathrm{d}t \Big\} \mathrm{d}x,$$

e quindi risulta $\mathrm{I}^*[\bar{y}(x)] = \mathrm{I}[\bar{y}(x)]$.

Tenuto conto di quanto si è detto, per ogni funzione $y(x) \in \mathrm{E}(\mathrm{T} \times \mathrm{G})$ si ha

$$\mathrm{I}[y(x)] - \mathrm{I}[\bar{y}(x)] = \mathrm{I}[y(x)] - \mathrm{I}^*[y(x)] =$$

$$= \int_a^b \Big\{ f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) - f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \cdots, \bar{y}^{(n)}(x)) -$$

$$- \sum_{i=1}^n [\mathrm{A}^i(x, y^{(i-1)}(x))\, y^{(i)}(x) - \mathrm{A}^i(x, \bar{y}^{(i-1)}(x))\, \bar{y}^{(i)}(x)] - \sum_{i=1}^n \int_{\bar{y}^{(i-1)}(x)}^{y^{(i-1)}(x)} \mathrm{A}_x^i(x, t)\, \mathrm{d}t \Big\} \mathrm{d}x.$$

Sussiste, allora, il seguente

TEOREMA: *La funzione* $\bar{y}(x)$ *minimizza* $\mathrm{I}[y]$ *in* $\mathrm{E}(\mathrm{T} \times \mathrm{G})$, *se si possono scegliere* n *funzioni di due variabili* $\mathrm{A}^i(x, y_{i-1})$, *definite e continue con le derivate parziali* $\mathrm{A}_x^i(x, y_{i-1})$ *negli insiemi* (2) $(i = 1, \cdots, n)$, *in modo che si abbia, per ogni punto* $(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ *di* $\mathrm{T} \times \mathrm{G}$

$$\Omega(x, y_0, y_1, \cdots, y_n) \equiv \tag{4}$$

$$\equiv f(x, y_0, y_1, \cdots, y_n) - f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \cdots, \bar{y}^{(n)}(x)) -$$

$$- \sum_{i=1}^n \{ \mathrm{A}^i(x, y_{i-1})\, y_i - \mathrm{A}^i(x, \bar{y}^{(i-1)}(x))\, \bar{y}^{(i)}(x) \} -$$

$$- \sum_{i=1}^n \int_{\bar{y}^{(i-1)}(x)}^{y_{i-1}} \mathrm{A}_x^i(x, t)\, \mathrm{d}t \geq 0.$$

Infine facciamo le seguenti osservazioni:

1° Se vale la (4), la funzione $\Omega(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ assume, per ogni $x \in (a, b)$, il suo minimo assoluto per i valori $y_i = \bar{y}^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, \cdots, n$. Supponiamo che sia $\rho_i'(x)\ \rho_i''(x) > 0$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1;\ a < x < b)$ e che il punto $\bar{y}^{(n)}(x)$ sia sempre interno all'insieme G. Supponiamo, inoltre, che la funzione $f(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ abbia, in $\mathrm{T} \times \mathrm{G}$, le derivate parziali continue rispetto a $y_0, y_1, \cdots, y_n$. In questo caso valgono le seguenti uguaglianze:

$$\Omega_{y_0} = \bar{f}_{y_0} - \bar{A}^1_{y_0}\bar{y}'(x) - \bar{A}^1_x = 0;$$

$$\Omega_{y_i} = \bar{f}_{y_i} - \bar{A}^{i+1}_{y_i}\bar{y}^{(i)}(x) - \bar{A}^i - \bar{A}^{i+1}_x = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n-1);$$

$$\Omega_{y_n} = \bar{f}_{y_n} - \bar{A}^n = 0\ ^{(4)}.$$

Da queste uguaglianze, dopo un calcolo semplice, si ha

$$\int_a^x\int_a^{t_n}\cdots\int_a^{t_2}\bar{f}_{y_0}\,dt_1\cdots dt_n - \int_a^x\int_a^{t_{n-1}}\cdots\int_a^{t_2}\bar{f}_{y_1}\,dt_1\cdots dt_{n-1} + \cdots + (-1)^{n+1}\int_a^x\bar{f}_{y_{n-1}}\,dt +$$

$$+ (-1)^n\bar{f}_{y_n} = c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \quad \text{per} \quad a \leq x \leq b$$

e questa è la ben nota *Equazione di Eulero nella forma integrale;*

2° si può facilmente formulare, in modo analogo, la condizione sufficiente nel caso in cui l'integrale dipende da più di una funzione e dalle loro derivate di ordine superiore.

(4) Si ponga

$$\bar{\Omega}_{y_i} = \Omega_{y_i}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \cdots, \bar{y}^{(n)}(x)),$$

$$\bar{f}_{y_i} = f_{y_i}(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x), \cdots, \bar{y}^{(n)}(x)), \qquad (i = 0, 1, \cdots, n);$$

$$\bar{A}^i = A^i(x, \bar{y}^{(i-1)}(x)) \quad , \quad \bar{A}^{(i-1)}_{y_i} = A^{i+1}_{y_i}(x, \bar{y}^{(i)}(x)) \quad , \quad \bar{A}^{i+1}_x = A_x(x, \bar{y}^{(i)}(x)).$$