Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, L. E. Krivošein

Valutazione degli errori commessi in alcuni metodi di calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali d'ordine superiore

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.2, p. 123–129.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_2_123_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1963.

Analisi matematica. — *Valutazione degli errori commessi in alcuni metodi di calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali a derivate totali d'ordine superiore.* Nota di DEMETRIO MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN, presentata [*] dal Socio M. PICONE.

In questa Nota, prendendo le mosse da una nuova classe di problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone [7] [1], si dànno alcuni risultati tra quelli conseguiti nel problema di valutazione degli errori commessi spettanti ai metodi delle ineguaglianze integrali, polinomiale del tipo dei polinomi di S. N. Bernstein e delle formole di cubatura.

1. LA VALUTAZIONE SPETTANTE AL METODO DELLE INEGUAGLIANZE INTEGRALI. – Sia il problema di Dirichlet

$$(1)\qquad u(\mathrm{A})\,|_{\mathrm{Fr\,R}} = \mu_0(x\,,y)\,;\ \mathrm{D}^i u(\mathrm{A})\,|_{\mathrm{R_1}} = \mu_i(x\,,y) \qquad (i=1\,,2\,,\cdots,k-1)$$

e

$$(2)\qquad \mathrm{D}^k u(\mathrm{A}) + \lambda \sum_{i=k-1}^{0}\ \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(\mathrm{A})\,\frac{\partial^{i+j}u(\mathrm{A})}{\partial x^i\,\partial y^j} =$$

$$= f(\mathrm{A}) + \lambda \iint\limits_{\mathrm{R}} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \mathrm{K}_{ij}(\mathrm{A}\,,\mathrm{B})\,\frac{\partial^{i+j}u(\mathrm{B})}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j}\,d\mathrm{B}\,,$$

$\mathrm{R} \equiv (a \le x \le b\,; c \le y \le \mathrm{d})$; $\mathrm{R_1} \equiv (x = a\,, c \le y \le \mathrm{d}\,; y = c\,, a \le x \le b)$, ove $\mathrm{D}u(\mathrm{A}) \equiv \dfrac{\partial^2 u(x\,,y)}{\partial x\,\partial y}$ è la derivata totale nel senso di Picone [7];

$$\frac{\partial^{i+j}u(\mathrm{B})}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j} \equiv \frac{\partial^{i+j}u(\xi\,,\eta)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j}\quad ;\quad \frac{\partial^{i+j}u(\mathrm{A})}{\partial x^i\,\partial y^j} \equiv \frac{\partial^{i+j}u(x\,,y)}{\partial x^i\,\partial y^j}\,;$$

$f(\mathrm{A}) \equiv f(x\,,y)\,;\ \mathrm{K}_{ij}(\mathrm{A}\,,\mathrm{B}) \equiv \mathrm{K}_{ij}(x\,,y\,,\xi\,,\eta)\,,\ \varphi_1(y)\,,\ \psi_i(x)\,,\ r_{ij}(\mathrm{A}) \equiv r_{ij}(x\,,y)$

sono funzioni continue note per tutti i valori delle variabili $x\,,\xi \in [a\,,b]$; $y\,,\eta \in [c\,,d]$; $\mathrm{R} = [a\,,b]\times[c\,,d]$ è un rettangolo, $u(\mathrm{A}) \equiv u(x\,,y)$ è la funzione ricercata, λ è un parametro e k è un numero intero positivo arbitrariamente scelto. Inoltre almeno una delle funzioni $\mathrm{K}_{ij}(\mathrm{A}\,,\mathrm{B})$ non è identicamente nulla per $\{(x\,,y)\,,(\xi\,,\eta)\} \in \mathrm{T} = \{a \le \xi \le x \le b\,;\ c \le \eta \le y \le d\}$ oppure $\{(x\,,y)\,,(\xi\,,\eta)\} \in \mathrm{R} - \mathrm{T}$.

(*) Nella seduta del 9 febbraio 1963.

(1) La derivata totale oppure la derivata di Picone del primo ordine di una funzione $u(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_m)$ è $\mathrm{D}u \equiv u' = \dfrac{\partial^m u}{\partial x_1\,\partial x_2\cdots\partial x_m}$.

Nelle ipotesi in cui il sistema di equazioni integrali «equivalente» [8]

$$u(\mathrm{A}) = \pi(\mathrm{A}) + \lambda \iint_{\mathrm{R}} \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, v(\mathrm{B})\, d\mathrm{B}, \tag{3}$$

$$v(\mathrm{A}) = \omega(\mathrm{A}) + \lambda \iint_{\mathrm{R}} \mathcal{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, v(\mathrm{B})\, d\mathrm{B}, \tag{4}$$

ove $\pi(\mathrm{A})$ è una funzione nota soddisfacente alle condizioni non omogenei (1), $\mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ è la funzione introdotta dall'uno degli Autori [9]–[10] e già sfruttata in alcuni lavori precedenti [11]–[13] e $\omega(\mathrm{A})$ e $\mathcal{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ sono funzioni note risultati in seguito all'esecuzione dei calcoli di sostituzione della (3) nella uguaglianza di definizione della nuova funzione incognita $v(\mathrm{A})$

$$v(\mathrm{A}) = \iint_{\mathrm{R}} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} \mathrm{K}_{ij}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \frac{\partial^{i+j} u(\mathrm{B})}{\partial \xi^i \partial \eta^j}\, d\mathrm{B} - \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(\mathrm{A}) \frac{\partial^{i+j} u(\mathrm{A})}{\partial x^i \partial y^j}, \tag{5}$$

è tale che

$$\mathcal{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \geq 0 \quad , \quad \omega(\mathrm{A}) > 0 \quad , \quad \lambda > 0, \tag{6}$$

per tutti $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{R}$, e si ha – una volta assicurata l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (1) e (2) –,

$$l_1 = 1 - \max_{\mathrm{Q}} \iint_{\mathrm{R}} \lambda \mathcal{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, d\mathrm{B} > 0, \quad \mathrm{Q} = \{0 < \lambda < \lambda_{1}; \mathrm{R}\}, \tag{7}$$

ha luogo il

TEOREMA 1. – La valutazione dell'errore commesso – se ci si ferma all'i-mo passo di approssimazione di cui sotto – è data dalle ineguaglianze

$$\left.\begin{array}{l} |\mathrm{D}^p[u(\mathrm{A}) - u_i(\mathrm{A})]| \\ |\mathrm{D}^p[u(\mathrm{A}) - \mathrm{U}_i(\mathrm{A})]| \end{array}\right\} \leq \lambda \iint_{\mathrm{R}} |\mathrm{D}^p_{\mathrm{A}} \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \cdot [\mathrm{U}_i(\mathrm{B}) - u_i(\mathrm{B})]|\, d\mathrm{B}, \tag{8}$$

$$(\mathrm{A}, \lambda) \in \mathrm{Q}; \qquad (p = 0, 1, \cdots, k-2),$$

ove

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{i \to \infty} u_i(\mathrm{A}) = \pi(\mathrm{A}) + \lambda \iint_{\mathrm{R}} \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \left[v_0(\mathrm{B}) - \sum\limits_{p=0}^{\infty} \alpha_p(\mathrm{B}, \lambda)\right] d\mathrm{B} = u(\mathrm{A}); \\ \lim\limits_{i \to \infty} \mathrm{U}_i(\mathrm{A}) = \pi(\mathrm{A}) + \lambda \iint_{\mathrm{R}} \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \left[w_0(\mathrm{B}) - \sum\limits_{p=0}^{\infty} \beta_p(\mathrm{B}, \lambda)\right] d\mathrm{B} = u(\mathrm{A}), \end{array}\right. \tag{9}$$

mentre le funzioni note $v_0(\mathrm{A})$, $w_0(\mathrm{A})$ e $\alpha_0(\mathrm{A}, \lambda)$, $\beta_0(\mathrm{A}, \lambda)$ sono tali da soddisfare le ineguaglianze

$$v_0(\mathrm{A}) - \lambda \iint_{\mathrm{R}} \mathcal{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, v_0(\mathrm{B})\, d\mathrm{B} - \omega(\mathrm{A}) \equiv \alpha_0(\mathrm{A}, \lambda) \leq 0, \tag{11}$$

$$w_0(\mathrm{A}) - \lambda \iint_{\mathrm{R}} \mathcal{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, w_0(\mathrm{B})\, d\mathrm{B} - \omega(\mathrm{A}) \equiv \beta_0(\mathrm{A}, \lambda) \geq 0, \tag{12}$$

e

$$v_i(\mathrm{A}) = v_0(\mathrm{A}) - \sum_{p=0}^{i-1} \alpha_p(\mathrm{A}, \lambda), \tag{13}$$

$$w_i(\mathrm{A}) = w_0(\mathrm{A}) - \sum_{p=0}^{i-1} \beta_p(\mathrm{A}, \lambda), \tag{14}$$

$$v_p(\mathrm{A}) - \lambda \iint_{\mathrm{R}} \mathcal{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, v_p(\mathrm{B})\, d\mathrm{B} - \omega(\mathrm{A}) \equiv \alpha_p(\mathrm{A}, \alpha), \tag{15}$$

$$w_p(\mathrm{A}) - \lambda \iint_{\mathrm{R}} \mathcal{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, w_p(\mathrm{B})\, d\mathrm{B} - \omega(\mathrm{A}) \equiv \beta_p(\mathrm{A}, \lambda), \tag{16}$$

$$v_i(\mathrm{A}) \leq v(\mathrm{A}) \leq w_i(\mathrm{A}) \qquad (\mathrm{A} \in \mathrm{R}, i = 1, 2, \cdots). \tag{17}$$

In una vasta Memoria in corso di stampa nei « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova » fuorché vari sviluppi algoritmici vi saranno discussi diversi altri casi, come lo è ad esempio il caso $\lambda > 0$, $\mathcal{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq 0$, in cui la funzione $\omega(\mathrm{A})$ cambia segno nel dominio R, $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{R}$.

2. LA VALUTAZIONE SPETTANTE AL METODO DI APPROSSIMAZIONE COI POLINOMI DEL TIPO DI S. N. BERNSTEIN [14]-[16]. – Ha luogo il seguente

TEOREMA 2. – Nelle ipotesi (7) la valutazione dell'errore commesso prendendovi per soluzione approssimativa del problema al contorno (1), (2) la funzione

$$\bar{u}_{np}(\mathrm{A}) = \pi(\mathrm{A}) + \lambda \iint_{\mathrm{R}} \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \varphi_{np}(\nu, s, \lambda)\, \mathrm{T}_{n\nu}(\xi)\, \mathrm{T}_{ps}(\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{18}$$

è data dall'ineguaglianza

$$| u(\mathrm{A}) - \bar{u}_{np}(\mathrm{A}) | \leq \sigma \iint_{\mathrm{R}} | \lambda \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) |\, d\mathrm{B}, \tag{19}$$

essendovi

$$| v(\mathrm{A}) - \overline{\mathrm{C}}_{np}(\mathrm{A}) | \leq \max_{\mathrm{Q}} \vec{r}_{np}(\mathrm{A}, \lambda) | : l_1 = \sigma, \tag{20}$$

$$\vec{r}_{np}(\mathrm{A}, \lambda) = \overline{\mathrm{C}}_{np}(\mathrm{A}) - \lambda \iint_{\mathrm{R}} \mathcal{E}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, \overline{\mathrm{C}}_{np}(\mathrm{B})\, d\mathrm{B} - \omega(\mathrm{A}), \tag{21}$$

$$\overline{\mathrm{C}}_{np}(\mathrm{A}) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \varphi_{np}(\nu, s, \lambda)\, \mathrm{T}_{n\nu}(x)\, \mathrm{T}_{ps}(y), \ (\mathrm{A}, \lambda) \in \mathrm{Q}, \tag{22}$$

mentre le $\varphi_{np}(\nu, s, \lambda) = \bar{v}(\nu : n, s : p)$ risultano dalla risoluzione del sistema

$$\bar{v}(i : n, j : p) - \lambda \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \bar{v}(\nu : n, s : p) \iint_{\mathrm{R}} \mathcal{E}(i : n, j : p, \xi, \eta)\, \mathrm{T}_{n\nu}(\xi)\, \mathrm{T}_{ps}(\eta)\, d\xi\, d\eta = \tag{23}$$
$$= \omega(i : n, j : p) \qquad (i = 0, 1, \cdots, n : j = 0, 1, \cdots, p),$$

supponendosi il determinante $\Delta_{np}(\lambda) \neq 0$ e

$$C_{np}(A) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} T_{n\nu}(x) T_{ps}(y) v(\nu : n , s : p), \tag{24}$$

allorché le funzioni $T_{n\nu}(x)$ e $T_{ps}(y)$ risultano classici polinomi di Bernstein

$$\begin{cases} T_{n\nu}(x) = C_n^\nu x^\nu (1 - x)^{n-\nu} \quad , \quad T_{ps}(y) = C_p^s y^s (1 - y)^{p-s}, \\ C_r^i = \dfrac{r(r-1)\cdots(r-i+1)}{i!} . \end{cases} \tag{25}$$

Nell'enunciato di cui sopra si è preso senza menomare la generalità $a = c = 0$, $b = d = 1$, $r_{k-1,k-1}(A) \equiv 0$, supponendovi nota l'esistenza e l'unicità del dominio Q della soluzione $2k$ volte continuamente derivabile del problema proposto, mentre $\nu(A) = W_1(A, \lambda)$ è una soluzione continua dell'equazione (4) per tutti $(A, \lambda) \in Q = \{R, \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2\}$.

3. LA VALUTAZIONE SPETTANTE AL METODO DELLE FCRMULE DI CUBATURA. – La valutazione ricercata si esegue in modo analogo a quello indicato cui sopra partendo da ciò che segue. Sia nella (2) $r_{k-1,k-1}(A) = 0$, $(A \in R)$. Rappresentando il termine contenente l'integrale entrante nella (4) sotto la forma

$$\iint_R \mathcal{E}(A, B) v(B) \, dB = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} d_{ij} \mathcal{E}(A, x_i y_j) v(x_i, y_j) + \rho(x, y), \tag{26}$$

ove d_{ij} sono coefficienti noti, $(x_i, y_j) \in R$ e $\rho(x, y)$ è l'errore della formola di cubatura scelta, si ottiene per la determinazione delle incognite $v(x_i, y_j)$ il seguente sistema di equazioni

$$v(x_\alpha, y_\beta) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \mathcal{E}(x_\alpha, y_\beta, x_i, y_j) v(x_i, y_j) = \omega(x_\alpha, y_\beta) - \lambda\rho(x_\alpha, y_\beta), \tag{27}$$

$$(\alpha = 1, 2, \cdots, n ; \beta = 1, 2, \cdots, p).$$

Supponendovi il determinante $\Delta(n, p, \lambda)$ del sistema (27) diverso dallo zero, si ottiene

$$v(x_i, y_j) = \xi_{ij}(\lambda) + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{p} \gamma_{ij}(\alpha, \beta, \lambda) \rho(x_\alpha, y_\beta), \tag{28}$$

ove $\xi_{ij}(\lambda)$, $\gamma_{ij}(\alpha, \beta, \lambda)$ sono quantità note. Per conseguenza, se si può farne a meno delle $\rho(x_\alpha, y_\beta)$ che vi figurano nelle (28), la soluzione approssimativa del problema (1), (2) può essere scritta sotto la forma

$$u_{np}(A) = \pi(A) + \lambda \iint_R M(A, B) \left[\omega(B) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} d_{ij} \mathcal{E}(B, x_i, y_j) \xi_{ij}(\lambda) \right] dB. \tag{29}$$

Nel caso in cui gli integrali che vi figurano nelle (29) non si possono calcolare in modo esatto, si procede all'utilizzazione della formola del tipo

$$\bar{u}_{np}(\mathrm{A}) = \pi(\mathrm{A}) + \lambda \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{p} \mathrm{M}(\mathrm{A}, x_\alpha, y_\beta) \cdot \tag{30}$$

$$\cdot \left[\omega(x_\alpha, y_\beta) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} d_{ij}\, \mathcal{E}(x_\alpha, y_\beta, x_i, y_j)\, \xi_{ij}(\lambda) \right] d_{\alpha\beta}.$$

4. Rinunciando qui all'enumerazione degli indirizzi in cui si prosegue la via di estensione e di generalizzazione dei risultati conseguiti ed additando alle sorgenti di questo lavoro che constano nella serie di Note del primo degli Autori [17]–[20], già utilizzate col profitto dal F. Manaresi [21], M. Salvadori [22], E. de Giorgi [23], G. Stampacchia [24], M. Yu. Berezanski [25], A. Rosenblatt [26], D. D. Stancu [27] ed altri ancora e nella serie di lavori del secondo, concretizzati nella sua tesi di abilitazione [28]–[30], ci soffermiamo soltanto all'indicazione del fatto che essi rispondono all'importanza vieppiù crescente accordata in questi ultimi tempi alle schematizzazioni matematiche, tradotte in equazioni integro–differenziali lineari o no, dei problemi di fisica, meccanica, teoria della elasticità o plasticità ed alta tecnica, incominciando col problema di trasporto delle particole [31]–[32] e concludendo col problema di stabilità delle soluzioni dell'equazione della plasma oppure con lo studio della dinamica dei reattori [33]–[35].

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quart'ordine non lineare con le caratteristiche reali doppie*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Roma », Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. VI, *18*, 305–310 (1932).

[2] D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per un'equazione alle derivate parziali con le caratteristiche reali doppie*, « Rend. Accad. Sci. fis., mat. e nat., Napoli », (4), II, pp. 1–11 (1932).

[3] D. MANGERON, E. CROITORU, *Equazioni di programmazione dinamica concernenti i problemi al contorno a derivate totali nel senso di Picone*, « Rend. dell'Accad. Naz. dei Lincei », Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. VIII, vol. XXXII, fasc. 5, pp. 619–623 (1962).

[4] D. MANGERON, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur*, « C. R. Acad. Sci., Paris », 255 (1962).

[5] D. MANGERON, *Sur une nouvelle classe de problèmes à la frontière*. International Congress of Mathematicians. « Programme ». Stockholm, p. 62 (1962).

[6] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, « Ann. Sci. de l'Univ., Jassy », I Section (Math., Phys., Chimie), XXVI, I, pp. 183–232 (1940).

[7] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone*, « Rend. Sem. Mat. Univ., Padova » (1962) (in corso di stampa).

[8] D. MANGERON, *Sur les noyaux associés à certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « Mathematica, Cluj », *14*, pp. 31–35 (1938).

[9] D. MANGERON, *New classes of functions related to the equations with total derivatives*, «Bul. Inst. politehn. Iaşi», N. S. (8), *4*, 3–4, pp. 73–74 (1958).

[10] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone*. (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*), « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), *31*, 1–2, pp. 27–32 (1961).

[11] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sur une classe d'équations intégro-différentielles aux dérivées totales*, « Bul. Inst. politehn., Iaşi », N. S. (11), *7*, 1–2, pp. 25–34 (1961).

[12] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Some new boundary value problems related to a class of integro-differential equations*, « Bull. Sci. Math. pures et appl., Bucarest » (1962) (in print).

[13] S. N. BERNSTEIN, *Sobranie sočinenii* (*Opera matematica*). Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskva, pp. 105–106 (1952).

[14] A. F. IPATOV, *Otzenka pogrešnosti i poreadok približenia funktzii dvuh peremennyh polinomami S. N. Bernsteina* (*Valutazione dell'errore e l'ordine di approssimazione delle funzioni in due variabili tramite polinomi di S. N. Bernstein*), « Uč. zapiski Petrozavordskogo Un–ta » (4), *4*, pp. 31–48; 49–58 (1957).

[15] S. VASILACHE, *O novyh kraevyh zadacah dlea nekotoryh integro-differentzial'nyh uravnenii ili uravnenii v častnyh proizvodnyh* (*Sopra alcuni nuovi problemi al contorno per certe equazioni integro-differenziali o a derivate parziali*). « Rev. math. pures et appl., Bucarest » (5), *2*, pp. 251–274 (1960).

[16] D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quart'ordine con le caratteristiche reali doppie*, « Giornale di Matematiche », *71*, pp. 1–51 (1933).

[17] D. MANGERON, *Sur certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « C. R. Acad. Sci., Paris », *204*, pp. 94–96; 544–546; 1022–1024 (1937).

[18] D. MANGERON, *Sur quelques procédés de calcul concernant la détermination des formules de majoration pour certains systèmes différentiels*, « Bull. Inst. Polytehn., Jassy » (2), *3*, pp. 814–818 (1948).

[19] D. MANGERON, *Sur les problèmes de Dirichlet pour les équations aux dérivées totales*, « Bul. Inst. politehn., Iaşi », N. S. (7), *3*, 3–4, pp. 49–52 (1957).

[20] F. MANARESI, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *23*, pp. 163–213 (1954).

[21] M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa » (2), *5*, pp. 51–72 (1936).

[22] E. DE GIORGI, *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo ad equazioni differenziali a derivate parziali di tipo parabolico*, « *Scritti Matematici offerti a Mauro Picone* », Bologna, Azzoguidi, pp. 781–787 (1955).

[23] G. STAMPACCHIA, *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni a derivate parziali del tipo iperbolico*, « Giornale di Matematiche di Battaglini » (4), *78*, pp. 81–96 (1948–49).

[24] M. YU. BEREZANSKI, *O kraevyh zadačah dlea obščih differentzial'nyh operatorov v častnyh proizvodnyh* (*Sui problemi al contorno per gli operatori differenziali generali a derivate parziali*) « Doklady Akad. Nauk SSSR » (6), *122*, pp. 959–962 (1958).

[25] A. ROSENBLATT, *Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'intégration d'une certaine équation aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « C. R. Acad. Sci., Paris », *207*, pp. 1278–1280 (1933).

[26] D. D. STANCU, *The generalization of certain interpolation formulae for the functions of many variables*, « Bul. Inst. politehn., Iaşi », N. S. (7), *3*, 1–2, pp. 31–38 (1957).

[27] L. E. KRIVOSEIN, *Priblizennoe rešenie nekotoryh zadač dlea lineinyh integro-differentzial'nyh uravnenii* (*Soluzione approssimativa di alcuni problemi concernenti equazioni lineari integro-differenziali*). L'autoresoconto della tesi di abilitazione (Cand. sci. fis., mat). Sredneaziatskii Gos. Univ., Taskent, 1958.

[28] L. E. KRIVOŠEIN, *K rešeniju odnoi zadači dlea integro-differentzial'nyh uravnenii* (*Sopra la risoluzione di un problema concernente le equazioni integro-differenziali*). Nel volume *Issledovania po integro-differentzial'nym uravneniam v Kirgizii*, I, Akad. Nauk SSSR, Frunze, pp. 177–189 (1961).

[29] IA. V. BYKOV, *O nekotoryh voprosah kacestvennoi teorii integro-differentzial'nyh uravenii* (*Sopra alcuni problemi qualitativi concernenti le equazioni integro-differenziali*). Nel volume *Issledovania po integro-differentzial'nym uravneniam v Kirgizii*, I, Akad. Nauk Kirg. SSSR, Frunze, pp. 3–54 (1961).

[30] G. F. KOHLMAYR, *Die Greensche Funktion zum Integrodifferential operator der stationären Neutronentransporttheorie*, « Acta phys., austriaca », *13*, 2–3, 300–314 (1960).

[31] J. J. LEVIN, J. A. NOHEL, *On a system of integro-differential equations occuring in reactor dynamics*, « J. Math. and Mech. », *9–3*, pp. 347–368 (1960).

[32] R. BELLMAN, J. M. RICHARDSON, *On the stability of solutions of the linearized plasma equations*, « J. Math. Analysis and Applic. », *1*, 3–4, pp. 308–313 (1960).

[33] V. S. VLADIMIROV, *Ob integro-differentzial'nom uravnenii perenosa častitz* (*Sull'equazione integro-differenziale di trasporto delle particole*), « Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. matem. », *21*, 5, 681–710 (1957).

[34] V. E. BENEŠ, *A nonlinear integral equation from the theory of servomechanisms*, « Bell. System Tech. J. », *49*, 1309–1321 (1961).