Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Demetrio Mangeron

# Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **34** (1963), n.2, p. 118–122.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_2_118_0¿

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro–differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore.* Nota di DEMETRIO MANGERON, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Nell'ambito della ricchissima messa di risultati concernenti le equazioni integro–differenziali conseguiti in questi ultimi anni sopratutto dalla scuola di Ia. V. Bykov e L. E. Krivošein [1]–[4], dal S. Vasilache [5]–[6] ed altri ancora si allineano le ricerche dell'autore, solo oppure in collaborazione [7]–[12], relative ai vari problemi al contorno per gli operatori differenziali non ellittici d'ordine superiore, lineari o no, in cui interviene la derivata di Picone [13], definita tramite

$$Du = u' \equiv \frac{\partial^m u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \cdots \partial x_m} .$$

In questo lavoro si espongono alcuni risultati concernenti la risolubilità e la struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro–differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore, riservando i dettagli e numerosi sviluppi algoritmici per una vasta Memoria, elaborata in collaborazione col prof. L. E. Krivošein, programmata di essere pubblicata nei « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova ».

2. IL PROBLEMA DI GOURSAT. – Si considera il problema

$$(1) \qquad [D^i u(x, y)]_{x=a} = \varphi_i(y) \quad ; \quad [D^i u(x, y)]_{y=c} = \psi_i(x) \qquad (i = 0, 1, \cdots, k-1)$$

per l'equazione integro–differenziale lineare a derivate parziali

$$(2) \qquad D^k u(A) + \lambda \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \, \partial y^j} = f(A) + \lambda \iint\limits_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \, \partial \eta^i} \, dB,$$

ove $Du(A) \equiv \dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \, \partial y}$ è la derivata totale di Picone [13];

$$\frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \, \partial \eta^j} \equiv \frac{\partial^{i+j} u(\xi, \eta)}{\partial \xi^i \, \partial \eta^j} \quad ; \quad \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \, \partial y^j} \equiv \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \, \partial y^j} ;$$

$f(A) \equiv f(x, y)$; $K_{ij}(A, B) \equiv K_{ij}(x, y, \xi, \eta)$; $\varphi_i(y)$; $\psi_i(x)$; $r_{ij}(A) \equiv r_{ij}(x, y)$

(*) Nella seduta del 9 febbraio 1963.

sono funzioni continue note, definite per tutti $x, \xi \in [a, b]$; $y, \eta \in [c, d]$; $S = [a, b] \times [c, d]$ è un rettangolo; $u(A) \equiv u(x, y)$ è la funzione ricercata, mentre $\lambda$ è un parametro e $k$ è un numero intero positivo arbitrariamente scelto. Si suppone inoltre che almeno una delle funzioni $K_{ij}(A, B)$ non si annulla identicamente se

$$\{(x, y), (\xi, \eta)\} \in T = \{a \leq \xi \leq x \leq b; c \leq \eta \leq y \leq d\},$$

oppure

$$\{(x, y), (\xi, \eta)\} \in S - T.$$

Ha luogo il seguente

TEOREMA I. – Se $\lambda$ non è un autovalore del nucleo dell'equazione integrale

$$v(A) - \lambda \iint_S \mathfrak{L}(A, B) v(B) \, dB = F(A, \lambda), \tag{3}$$

ottenuta in seguito dell'applicazione dell'operatore

$$P[\cdot] \equiv \iint_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j}}{\partial \xi^i \partial \eta^j} dB - \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \tag{4}$$

alla funzione $u(A)$ di classe $C_{2k}$, trascritta sotto la forma

$$u(A) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B) v(B) \, dB, \tag{5}$$

ove le funzioni note $\Phi(A)$ e $N(A, B)$ soddisfano le condizioni

$$D^k \Phi(A) = f(A), [D^i \Phi(A)]_{x=a} = \varphi_i(y), [D^i \Phi(A)]_{y=c} = \psi_i(x), \tag{6}$$

$$(i = 0, 1, \cdots, k-1);$$

$$N(A, B) \equiv [(x - \xi)(y - \eta)]^{k-1} : [(k-1)!]^2 \quad , \quad dB = d\xi \, d\eta, \tag{7}$$

e la nuova funzione incognita $v(A)$ è definita tramite

$$v(A) = \iint_S \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} dB - \sum_{i=k-1}^{0} \sum_{j=k-1}^{0} r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j}, \tag{8}$$

allora il problema (1), (2) ha sempre una soluzione unica $2k$ volte continuamente derivabile, rappresentabile sotto la forma

$$u(A) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B) w(B, \lambda) \, dB, \tag{9}$$

ove si è posto $v(A) = w(A, \lambda)$.

Se $\lambda$ è un autovalore di rango $r$ del nucleo $\mathfrak{L}(A, B)$, allora la soluzione del problema (1), (2) esiste nella classe $C_{2k}$ allora ed allora soltanto se vi hanno luogo le uguaglianze

$$\iint_S F(A, \lambda)\, h_i(A)\, dA = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r), \tag{10}$$

ove $h_i(A)$ sono autofunzioni corrispondenti all'autovalore $\lambda$ del nucleo aggiunto al $\mathfrak{L}(A, B)$. Una volta soddisfatte le (10), la soluzione del problema (1), (2) nella classe di funzioni $2k$ volte continuamente derivabili – pur non essendo più unica – esiste ed è data dalla formula

$$u(A) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B) \left[ w_0(B, \lambda) + \sum_1^r q_i\, w_i(B) \right] dB, \tag{11}$$

ove $w_0(A, \lambda)$ è una soluzione particolare arbitraria dell'equazione (3), $w_i(A, \lambda)$ sono le autofunzioni corrispondenti all'autovalore $\lambda$ del nucleo $\mathfrak{L}(A, B)$ e $q_1, q_2, \cdots, q_r$ sono costanti arbitrarie.

Il problema (1), (2) possiede sempre una soluzione unica $2k$ volte continuamente derivabile nel caso in cui i nuclei dell'equazione integro-differenziale (2) giovano dalla proprietà

$$K_{ij}(A, B) \equiv \begin{cases} K_{ij}^*(A, B) & , \quad B \in T, \\ 0 & , \quad B \in S - T. \end{cases} \tag{12}$$

3. Il problema di Dirichlet. – Si consideri il problema (2) e

$$u(A)|_R = \mu_0(x, y) \quad ; \quad D^i u(A)|_{R_1} = \mu_i(x, y), \quad (i = 1, 2, \cdots, k-1), \tag{13}$$

ove R è il contorno del dominio S,

$$R_1 \equiv \begin{cases} x = a & , \quad c \leq y \leq d, \\ y = c & , \quad a \leq x \leq b \end{cases} \tag{14}$$

e $\mu_i(x, y)$ $(i = 0, 1, \cdots, k-1)$ sono funzioni continue note per tutti $(x, y) \in S$.

Ha luogo il seguente

Teorema 2. – Il problema (2), (13) è equivalente al sistema di equazioni integrali

$$u(A) = \pi(A) + \lambda \iint_S M(A, B)\, v(B)\, dB, \tag{15}$$

$$v(A) = \omega(A) + \lambda \iint_S \mathcal{E}(A, B)\, v(B)\, dB, \tag{16}$$

nel senso che la risolubilità di quest'ultime ne attrae quella del problema al contorno iniziale, essendovi le funzioni note $\omega(A)$ e $\mathcal{E}(A, B)$ che vi compaiano nella (16) ottenute tramite introduzione della (15) nella (8), mentre $v(A)$ è la nuova funzione incognita (8), $\pi(A)$ è una funzione nota soddisfacente alle condizioni non omogenei (13) e M (A , B) è una funzione nota, introdotta dall'autore [14] e definita tramite

$$M(x, y, \xi, \eta) \equiv$$

$$(17) \quad \equiv \begin{cases} \dfrac{[(x-a)(b-\xi)(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{[(b-a)(d-c)]^{k-1}(k-1)!^2}, & x \leq \xi ; y \leq \eta, \\[2ex] \left\{\dfrac{[(x-a)(b-\xi)]^{k-1}}{(b-a)^{k-1}} - (x-\xi)^{k-1}\right\} \dfrac{[(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-c)^{k-1}(k-1)!^2}, & x \geq \xi ; y \leq \eta, \\[2ex] \left\{\dfrac{[(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-c)^{k-1}} - (y-\eta)^{k-1}\right\} \dfrac{[(x-a)(b-\xi)]^{k-1}}{(b-a)^{k-1}(k-1)!^2}, & x \leq \xi ; y \geq \eta, \\[2ex] \left\{\dfrac{[(x-a)(b-\xi)]^{k-1}}{(b-a)^{k-1}} - (x-\xi)^{k-1}\right\} \left\{\dfrac{[(y-c)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-c)^{k-1}(k-1)!^2} - \dfrac{(y-\eta)^{k-1}}{(k-1)!^2}\right\}, & \\ & x \geq \xi ; y \geq \eta. \end{cases}$$

Il problema (2), (13) è risolubile nella classe di funzioni $2k$ volte continuamente derivabili allora ed allora soltanto quando esiste una soluzione continua dell'equazione integrale (16).

Se $\lambda$ non è un autovalore del nucleo $\mathcal{E}$ (A , B), allora la soluzione del problema ricercato si determina univocamente secondo la formula

$$(18) \qquad u(\mathrm{A}) = \pi(\mathrm{A}) + \lambda \iint_{\mathrm{S}} \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\, \mathrm{W}_0(\mathrm{B}, \lambda)\, d\mathrm{B},$$

ove $v(\mathrm{A}) = \mathrm{W}_0(\mathrm{A}, \lambda)$ è soluzione del problema (16).

Se $\lambda$ è un autovalore di rango $\nu$ del nucleo $\mathcal{E}$ (A , B), allora la soluzione del problema considerato sia che non esiste affatto (nel caso in cui le autofunzioni $m_1(\mathrm{A}), m_2(\mathrm{A}), \cdots, m_\nu(\mathrm{A})$ corrispondenti all'autovalore $\lambda$ del nucleo $\mathcal{E}$ (A , B) non sono ortogonali alla funzione $\omega(\mathrm{A})$), oppure non si determinano univocamente essendovi date tramite la formula

$$(19) \qquad v(\mathrm{A}) = \pi(\mathrm{A}) + \lambda \iint_{\mathrm{S}} \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \left[ v_0(\mathrm{B}, \lambda) + \sum_{i=1}^{\nu} q_i v_i(\mathrm{B}) \right] d\mathrm{B},$$

ove $v_0(\mathrm{A}, \lambda)$ è una soluzione particolare arbitraria dell'equazione (16), $v_1(\mathrm{A}), v_2(\mathrm{A}), \cdots, v_\nu(\mathrm{A})$ sono autofunzioni corrispondenti all'autovalore $\lambda$ del nucleo $\mathcal{E}$ (A , B), mentre $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ sono costanti arbitrarie ed ove tuttavia

$$(20) \qquad \iint_{\mathrm{S}} m_i(\mathrm{A})\, \omega(\mathrm{A})\, d\mathrm{A} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu).$$

4. In una Nota di prossima pubblicazione saranno esposti alcuni metodi di calcolo numerico concernenti i problemi testè risoluti, applicabili sopratutto nel caso in cui non si conoscono i nuclei risolventi dei nuclei che figurano nelle equazioni integrali di cui sopra.

## BIBLIOGRAFIA.


[1] IA. V. BYKOV, *O nekotoryh metodah postroenia rešenii integral'nyh i integro–differentzial'nyh uravnenii* (*Sopra alcuni metodi di risoluzione delle equazioni integrali e integro–differenziali*), « Akad. Nauk Kirg. SSR », Frunze 1961, 110 pp.

[2] IA. V. BYKOV, *O nekotoryh voprosah kačestvennoi teorii integro–differentzial'nyh uravnenii* (*Sopra alcuni problemi concernenti la teoria qualitativa delle equazioni integro–differenziali*). Nel volume *Issledovania po integro–differentzial'nym uravneniam v Kirgizii*, I. Akad. Nauk Kirg. SSR, Frunze 1961, pp. 3–54.

[3] L. E. KRIVOŠEIN, *Issledovania po integro–differentzial'nym uravneniam v Kirgizkom Gos. Universitete* (*Ricerche concernenti equazioni integro–differenziali nell'Università di Kirgizia*). Nel volume *Materialy 10–i naucnoi konferentzii professorsko–prepodavatel'skogo sostava fiz.–mat. fak* (*sektzia mat.*), Frunze 1961, pp. 3–13.

[4] L. E. KRIVOŠEIN, *K rešeniju odnoi zadači dlea integro–differentzial'nyh uravnenii* (*Sopra la risoluzione di un problema concernente le equazioni integro–differenziali*). Nel volume *Issledovania po integro–differentzial'nym uravneniam v Kirgizii*, I, Akad. Nauk Kirg. SSR, Frunze 1961, pp. 177–189.

[5] S. VASILACHE, *O novyh kraevyh zadačah dlea nekotoryh integro–differentzial'nyh uravnenii ili uravenii v častnyh proizvodnyh* (*Sopra alcuni nuovi problemi al contorno per certe equazioni integro–differenziali o a derivate parziali*), « Rev. math. pures et appl. Bucarest », (5), *2*, 251–274 (1960).

[6] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*). « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », Cl. sci. fis. mat. e nat. (8), XXXI, 1–2, pp. 27–32 (1961).

[7] D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppie*, « Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., Napoli » (4), II, 1–11 (1932).

[8] D. MANGERON, *Sur les problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « C. R. Acad. Sci., Paris », *204*, pp. 94–96; 544–546; 1022–1024 (1937).

[9] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone*, « Rend. Sem. Mat. Univ., Padova », (in corso di stampa).

[10] D. MANGERON, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur*, « C. R. Acad. Sci., Paris », 255 2894–2896 (1962).

[11] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Rešenie integro–differentzial'nyh uravnenii mnogočlennym metodom* (*Risoluzione delle equazioni integro–differenziali col metodo polinomiale*), « Mathematica », Cluj (27), *4*, 16 pp. (1962).

[12] D. MANGERON, *New classes of functions related to the equations with « total derivatives »*, « Bul. Inst. politehn. Iași », N. S. (8), *4*, 3–4, pp. 73–74 (1958).

[13] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica* « Ann. Sci. de l'Univ., Jassy », I Section (Math. Phys., Chimie ), XXVI, 1, pp. 183–232 (1940).

[14] D. MANGERON, *Sur les noyaux associés à certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « Mathematica », Cluj, *14*, pp. 31–35 (1938).