Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Danuta Przeworska-Rolewicz

Sur l'unique solution polyharmonique de l'equation $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta^k u(x,y) = v$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **34** (1963), n.1, p. 34–39.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_1_34_0¿

Analisi matematica. — *Sur l'unique solution polyharmonique de l'équation* $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta^k u = v$. Nota di DANUTA PRZEWORSKA-ROLEWICZ (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Nous nous proposons de déterminer dans la Note présente l'unique solution polyharmonique [1] dans un domaine simplement connexe D, situé sur le plan de la variable complexe $z = x + iy$, de l'équation suivante:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta^k u(x, y) = v(x, y) \tag{1}$$

où $n \geq 2$, les coefficients a_k sont des constantes complexes et la fonction donnée $v(x, y)$ est polyharmonique dans le domaine D. Nous allons utiliser dans ce but une simple méthode des opérations algébriques. Dans le travail [1] le théorème suivant a été démontré:

THÉORÈME 1. - Soit X un espace linéaire (sur le corps des nombres complexes) et S une opération additive et homogène, satisfaisant dans X à l'identité:

$$S^n = 0. \tag{2}$$

L'équation

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k S^k u = v \tag{3}$$

(où a_k sont des constantes complexes, $a_0 = 0$ et $v \in X$) admet dans X une solution unique. Notamment

$$u = a_0^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k d_{nk} S^k v, \tag{4}$$

où d_{nk} désigne le sous-déterminant du déterminant

$$d_n = \begin{vmatrix} a_0 & , & 0 & , & \cdots & , & 0 \\ a_1 & , & a_0 & , & \cdots & , & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n-1} & , & a_{n-2} & , & \cdots & , & a_0 \end{vmatrix} = a_0^n \neq 0 \tag{5}$$

obtenu en omettant la première colonne et la $(k+1)$-ième ligne.

(*) Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk (Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences).

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1963.

(1) Une fonction $u(x, y)$ est dite *n-harmonique* dans le domaine D, si elle satisfait dans D à l'équation $\Delta^n u = 0$, où Δ désigne l'opérateur de Laplace, et si elle possède les dérivées partielles d'ordre $2n$ continues dans ce domaine. Si $u(x, y)$ est n-harmonique pour un $n \geq 2$ on dit: u est *polyharmonique*.

Le théorème suivant résulte du théorème:

THÉORÈME 2. – Soit S une opération additive et homogène qui transforme l'espace linéaire X en lui-même. Soit

$$X_n = \{x \in X \quad : \quad S^n x = 0\} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

et $\tilde{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$. L'équation (3) admet pour $a_0 \neq 0$ et $v \in \tilde{X}$ une et une seule solution u dans l'espace $\tilde{X}$. Plus précisément on a $u \in X_{\tilde{n}}$ si $v \in X_{\tilde{n}}$ et u est donnée par la formule

$$u = a_0^{-N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k d_{Nk} S^k v, \tag{6}$$

où $N = \max(n, \tilde{n})$ et

$$a_n = a_{n+1} = \cdots = a_{N-1} = 0 \quad , \quad \text{si } n < N. \tag{7}$$

Démonstration. – Soit $v \in X_{\tilde{n}}$ et supposons que $\tilde{n} > n$. En admettant $a_n = a_{n+1} = \cdots = a_{\tilde{n}-1} = 0$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k S^k u = \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} a_k S^k u,$$

d'où, en vertu du théorème 1, il s'ensuit que

$$u = a_0^{-\tilde{n}} \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} (-1)^k d_{nk} S^k v \in X_{\tilde{n}}.$$

Dans le deuxième cas, si $\tilde{n} \leq n$, nous avons $X_{\tilde{n}} \subset X_n$. En effet, si $x \in X_{\tilde{n}}$ on a $S^n x = S^{n-\tilde{n}} (S^{\tilde{n}} x) = 0$, d'où $x \in X_n$. On peut donc admettre que $v \in X_n$ et appliquer le théorème 1 pour $X = X_n$. Il en résulte la thèse du notre théorème.

Dans [2] Vécouà a montré que toutes les fonctions n-harmoniques dans le domaine D sont déterminées par la formule:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} [U_m(z, \zeta, h_m, c_m) + U_m(\zeta, z, h_m^*, c_m)] \tag{8}$$

où

$$U_m(z, \zeta, h, c) = \frac{\zeta^m}{m!} \int_0^z \frac{(z-t)^m}{m!} h(t)\, dt + \frac{1}{2} c \frac{z^m \zeta^m}{m!\, m!} \tag{9}$$

$z = x + iy$, $\zeta = x - iy$, les fonctions $h_m(z)$ sont holomorphes dans D, les fonctions $h_m^*(\zeta)$ sont holomorphes dans le domaine $\bar{D} = \{\zeta = x - iy : x + iy \in D\}$, c_m sont des constantes complexes. Cette représentation est *unique*. En effet en admettant

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{10}$$

nous avons $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta}$ et

$$(11) \quad \begin{cases} c_m = \left(\dfrac{\partial^{2m} u}{\partial z^m \partial \zeta^m} \right)_{z=0, \zeta=0} & (m = 0, 1, \cdots, n-1) \\ h_m(z) = \left(\dfrac{\partial^{2m+1} u}{\partial z^{m+1} \partial \zeta^m} \right)_{\zeta=0} \quad ; & h_m^*(\zeta) = \left(\dfrac{\partial^{2m+1} u}{\partial z^m \partial \zeta^{m+1}} \right)_{z=0} ; \end{cases}$$

donc les constantes c_m et les fonctions h_m, h_m^* sont déterminées par les valeurs de la fonction u et ses dérivées sur les caractéristiques correspondantes $(z \in D, \zeta = 0)$ et $(z = 0, \zeta \in \bar{D})$.

Le théorème 2 va etre utilisé pour la solution du problème. Désignons par X_n l'ensemble de toutes les fonctions n–harmoniques dans le domaine D et par S l'opération $\frac{1}{4} \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta}$. Remarquons que les opérations $U_m(z, \zeta, h, c)$ sont linéaires par rapport à h et c; en effet nous avons

$$(12) \quad U_m(z, \zeta, \lambda h + \mu \tilde{h}, \lambda c + \mu \tilde{c}) = \lambda U_m(z, \zeta, h, c) + \mu U_m(z, \zeta, \tilde{h}, \tilde{c}),$$

d'où il s'ensuit que la combinaison linéaire $\lambda u + \mu \tilde{u}$ de deux fonctions n–harmoniques est aussi n–harmonique. L'ensemble X_n constitue donc un espace *linéaire*. En outre on a

$$S^k U_m(z, \zeta, h, c) = \begin{cases} U_{m-k}(z, \zeta, h, c) & \text{pour } k \leq m \\ 0 & \text{pour } k > m \end{cases}$$

$$(m, k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

En effet

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} U_m(z, \zeta, h, c) = \frac{\zeta^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^z \frac{(z-t)^m}{m!} h(t)\, dt + \frac{c}{2} \frac{\zeta^{m-1} z^m}{(m-1)!\, m!},$$

$$SU_m(z, \zeta, h, c) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} U_m(z, \zeta, h, c) =$$

$$\frac{\zeta^{m-1}}{(m-1)!} \left[\frac{(z-t)^m}{m!} \right]_{t=z} + \frac{\zeta^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^z \frac{(z-t)^{m-1}}{(m-1)!} h(t)\, dt + \frac{c}{2} \frac{\zeta^{m-1} z^{m-1}}{(m-1)!\,(m-1)!} =$$

$$\frac{\zeta^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^z \frac{(z-t)^{m-1}}{(m-1)!} h(t)\, dt + \frac{c}{2} \frac{\zeta^{m-1} z^{m-1}}{(m-1)!\,(m-1)!} = U_{m-1}(z, \zeta, h, c),$$

d'où $S^k U_m = U_{m-k}$ pour $k = 0, 1, \cdots, m$. Si la fonction $h^*(\zeta)$ est holomorphe dans le domaine $\bar{D}$, les formules analogues sont valables pour les opérations $U_m(\zeta, z, h^*, c)$. En vertu de la définition (9) nous avons

$$S^{m+1} U_m(z, \zeta h, c) = S^{m+1} U_m(\zeta, z, h^*, c) = 0,$$

d'où résulte que $S^n u = 0$ pour tout $u \in X_n$. Désignons par $\tilde{X}$ la classe de toutes les fonctions polyharmoniques dans le domaine D. Nous avons donc $\tilde{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$.

THÉORÈME 3. – L'équation (1) admet pour $a_0 \neq 0$ une et une seule solution dans la classe $\tilde{X}$. Si la fonction donnée v est $\tilde{n}$-harmonique, alors cette solution est N-harmonique, où $N = \max(n, \tilde{n})$ et elle est définie par la formule:

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{N-1} [U_m(z, \zeta, h_m, c_m) + U_m(\zeta, z, h_m^*, c_m)], \tag{14}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} c_m &= a_0^{-N} \sum_{k=0}^{N-1-m} (-1)^k d'_{Nk} C_{m+k} \qquad (m = 0, 1, \cdots, N-1) \\ h_m(z) &= a_0^{-N} \sum_{k=0}^{N-1-m} (-1)^k d'_{Nk} H_{m+k}(z) \qquad \text{et} \\ h_m^*(\zeta) &= a_0^{-N} \sum_{k=0}^{N-1-m} (-1)^k d'_{Nk} H_{m+k}^*(\zeta), \end{aligned}\right. \tag{15}$$

les déterminants d'_{Nk} sont obtenus des déterminants d_{Nk} par la substitution de $4^k a_k$ au lieu de a_k, $a_n = a_{n+1} = \cdots = a_{N-1} = 0$ si $n < N$ et

$$\left\{\begin{aligned} & H_m(z) = \left(\frac{\partial^{2m+1} v}{\partial z^{m+1} \partial \zeta^m}\right)_{\zeta=0} \quad ; \quad H_m^*(\zeta) = \left(\frac{\partial^{2m+1} v}{\partial z^m \partial \zeta^{m+1}}\right)_{z=0} \\ & C_m = \left(\frac{\partial^{2m} v}{\partial z^m \partial \zeta^m}\right)_{z=0, \zeta=0} \qquad (m = 0, 1, \cdots, N-1). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Démonstration. – En substituant dans l'équation (1) $\Delta = 4S$ nous obtenons une équation nouvelle:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 4^k a_k S^k u = v. \tag{17}$$

En vertu du théorème 2, nous pouvons admettre que la fonction v est N-harmonique pour $N = \max(n, \tilde{n})$ et la présenter, conformément aux notations (16), sous la forme

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} [U_m(z, \zeta, H_m, C_m) + U_m(\zeta, z, H_m^*, C_m)].$$

Remarquons que on a $H_m = H_m^* = C_m = 0$ pour $m = \tilde{n}, \tilde{n}+1, \cdots, N-1$ et $\tilde{n} < N$. Il s'ensuit du théorème 2, que la solution d'équation (1) est donnée par la formule

$$u(x, y) = a_0^{-N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k d'_{Nk} S^k v$$

d'où, d'après (15), (16), (18),

$$u(x,y)=a_0^{-N}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k d'_{Nk}\,S^k\left\{\sum_{m=0}^{N-1}[U_m(z,\zeta,H_m,C_m)+U_m(\zeta,z,H_m^*,C_m)]\right\}=$$

$$a_0^{-N}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k d'_{Nk}\sum_{m=k}^{N-1}[U_{m-k}(z,\zeta,H_m,C_m)+U_{m-k}(\zeta,z,H_m^*,C_m)]=$$

$$a_0^{-N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}d'_{N,m-k}[U_k(z,\zeta,H_m,C_m)+U_k(\zeta,z,H_m^*,C_m)]=$$

$$a_0^{-N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1-k}(-1)^m d'_{Nm}[U_k(z,\zeta,H_{m+k},C_{m+k})+U_k(\zeta,z,H_{m+k}^*,C_{m+k})].$$

En utilisant la formule (12) et les notations (15) et en changeant les rôles des indices k et m, nous obtenons la formule (14). La représentation (8) d'une fonction n–harmonique est unique, donc nous déduisons du théorème 2 que cette solution est unique.

THÉORÈME 4. – La solution (14) de l'équation (1) satisfait aux conditions initiales:

$$\left(\frac{\partial^k u}{\partial\zeta^k}\right)_{\zeta=0}=u_k(z)\quad;\quad\left(\frac{\partial^k u}{\partial z^k}\right)_{z=0}=u_k^*(\zeta)\qquad(k=0,1,\cdots,N-1)\tag{18}$$

avec les conditions de concordance

$$u_k^{(m)}(0)=u_m^{*(k)}(0)\qquad(m,k=0,1,\cdots,N-1)\tag{19}$$

si et seulement si ces fonctions initiales et la fonction donnée v satisfont aux égalités:

$$u_m^{(m)}(0)=a_0^{-N}\sum_{k=0}^{N-1-m}(-1)^k d'_{Nk}\,C_{m+k}\qquad(m=0,1,\cdots,N-1);\tag{20}$$

$$u_m^{(m+1)}(z)=a_0^{-N}\sum_{k=0}^{N-1-m}(-1)^k d'_{Nk}\,H_{m+k}(z);$$

$$u_m^{*(m+1)}(\zeta)=a_0^{-N}\sum_{k=0}^{N-1-m}(-1)^k d'_{Nk}\,H_{m+k}^*(\zeta).$$

Dans ce cas la solution de l'équation (1) admet la forme:

$$u(x,y)=\sum_{m=0}^{N-1}\{U_m[z,\zeta,u_m^{(m+1)},u_m^{(m)}(0)]+U_m[\zeta,z,u_m^{*(m+1)},u_m^{(m)}(0)]\}.\tag{21}$$

La démonstration résulte immédiatement du théorème 3, si nous remarquons (d'après Vécouà que la fonction u satisfait aux conditions (18) si et seulement si

$$c_m=u_m^{(m)}(0)\quad;\quad h_m(z)=u_m^{(m+1)}(z)\quad;\quad h_m^*(\zeta)=u_m^{*(m+1)}(\zeta)\tag{22}$$

$$(m=0,1,\cdots,N-1).$$

Remarquons enfin que la fonction N-harmonique réelle admet la représentation suivante:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k r^{2k} + \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z^k}{k!} \int_0^z \frac{(z-t)^k}{k!} h_k(t) \, dt$$

où $r = |z|$, c_k sont des constantes réelles et les fonctions $h_k(z)$ sont holomorphes dans le domaine D. La solution u de l'équation (1) est donc réelle, si $h_m^*(\bar{z}) = \overline{h_m(z)}$ et si les constantes c_m sont réelles. Nous en déduisons en s'appuyant sur les formules (15) que cette solution est réelle dans le cas où les coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_{N-1}$ sont réelles, $H_m^*(\bar{z}) = \overline{H_m(z)}$ et les constantes C_m sont réelles. Il en résulte que la solution ux, y est *réelle*, si les coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ et la fonction donnée $v(x, y)$ sont réelles.

TRAVAUX CITÉS.

[1] D. PRZEWORSKA-ROLEWICZ, *Équations avec les opérations algébriques*, « Studia Mathematica », XXII (1962).

[2] И. Н. ВЕКУА, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, Москва–Ленинград 1948, с. 170–186. (I. N. VÉCOUÀ, *Nouvelles méthodes de la résolution des équations elliptiques*, Moscou–Leningrad. 1948, pp. 170–186).