
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

SILVIO CINQUINI

Sopra un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.1, p. 27–33.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_1_27_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sopra un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari* (*). Nota II di SILVIO CINQUINI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

3. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL N. I (8). — *a*) Infatti, se $\bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m)$, ($j = 1, \dots, r$); $\bar{\bar{z}}_j(x, y_1, \dots, y_m)$, ($j = 1, \dots, r$) sono due integrali del sistema (I) soddisfacenti a tutte le ipotesi enunciate, per semplicità possiamo supporre che le funzioni $\omega_{jk}(x)$, $\Psi_{jk}(x)$, ($j = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, m$) siano le stesse per entrambe le soluzioni considerate.

Posto

$$(8) \quad Z_j(x, y_1, \dots, y_m) = \bar{\bar{z}}_j(x, y_1, \dots, y_m) - \bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m), \quad (j = 1, \dots, r),$$

le funzioni $Z_j(x, y_1, \dots, y_m)$ soddisfano alle ipotesi (I) e (II), e anche alla (III), nella quale alle (5) si sostituiscano le disuguaglianze

$$(9) \quad |Z_j(x, y_1^{[1]}, \dots, y_m^{[1]}) - Z_j(x, y_1^{[2]}, \dots, y_m^{[2]})| \leq 2 \sum_{k=1}^m \omega_{jk}(x) |y_k^{[1]} - y_k^{[2]}|, \\ (j = 1, \dots, r);$$

inoltre in virtù delle (7) in ogni punto (y_1, \dots, y_m) di Δ è $Z_j(0, y_1, \dots, y_m) = 0$ ($j = 1, \dots, r$).

Per provare l'asserto basta dimostrare che, in ogni punto (x, y_1, \dots, y_m) del campo D, è

$$(10) \quad Z_j(x, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad (j = 1, \dots, r).$$

β) A tal uopo fissiamo un numero positivo $a' \leq a$ in modo che siano verificate le disuguaglianze

$$(11) \quad \sum_{j=1}^r e^{\int_0^{a'} H_{jj}(x) dx} \int_0^{a'} H_{ji}(x) dx < 1, \quad (i = 1, \dots, r),$$

ove la scrittura Σ' indica che nella sommatoria va omissa il termine $j = i$, e cominciamo a dimostrare che le (10) hanno luogo in tutto il campo

$$D': \quad 0 \leq x \leq a', \quad b_k + \int_0^x L_k(u) du \leq y_k \leq b'_k - \int_0^x L_k(u) du, \quad (k = 1, \dots, m).$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Gruppo n. 19).

(**) Nella seduta del 15 dicembre 1962.

(8) Anche per quanto si riferisce alle notazioni, la presente Nota è la prosecuzione della Nota I. Vedi questi « Rendiconti », vol. XXXIII, pp. 401-404 (1962).

γ) Considerato un numero $\lambda > 0$, sia D'_λ il campo costituito da tutti i punti di D' e da quelli del rettangolo (a $m + 1$ dimensioni) $R_\lambda \equiv [-\lambda \leq x < 0, b_k \leq y_k \leq b'_k, (k = 1, \dots, m)]$ e completiamo la definizione delle funzioni $\bar{z}_j, \bar{z}'_j, f_j$ ponendo in ogni punto (x, y_1, \dots, y_m) di R_λ

$$(12) \quad \bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m) = \bar{z}'_j(x, y_1, \dots, y_m) = \varphi_j(y_1, \dots, y_m), \quad (j = 1, \dots, r),$$

e anche per ogni $(m + r)$ -pla $(z_1, \dots, z_r; u_1, \dots, u_m)$

$$(13) \quad f_j(x, y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_r; u_1, \dots, u_m) = 0, \quad (j = 1, \dots, r).$$

Inoltre nell'intervallo $-\lambda \leq x < 0$ definiamo

$$L_k(x) = G_{ik\nu}(x) = H_0(x) = H_{ji}(x) = \omega_{ik}(x) = \Psi_{ik}(x) = 0$$

per $k, \nu = 1, \dots, m; j, i = 1, \dots, r$.

Nel rettangolo R_λ in virtù delle (13) il sistema (1) si riduce a

$$\frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial x} = 0, \quad (j = 1, \dots, r),$$

e quindi le r -ple di funzione $\bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m), (j = 1, \dots, r); \bar{z}'_j(x, y_1, \dots, y_m), (j = 1, \dots, r)$ sono soluzioni di tale sistema ⁽⁹⁾; per le (12) è $Z_j(x, y_1, \dots, y_m) = \frac{\partial Z_j}{\partial x} = \frac{\partial Z_j}{\partial y_k} = 0, (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m)$, e infine, sempre in R_λ , sono verificate anche le (3) e (4).

Ciò premesso, sia $\mu_n, (n = 1, 2, \dots)$ (con $\mu_1 \leq 1; 4\mu_1 < b'_k - b_k, (k = 1, \dots, m)$) una successione di numeri reali positivi, decrescenti e tendenti a zero, alla quale subordiniamo successivamente due altre successioni di numeri reali positivi, decrescenti e tendenti a zero $\gamma_n, (n = 1, 2, \dots); \lambda_n, (n = 1, 2, \dots)$ (ove $\lambda_1 < \lambda$) con

$$(14) \quad \lambda_n \leq \gamma_n \leq \gamma_n^\alpha \leq \mu_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1^a in ogni rettangolo (a $r + 1$ dimensioni) $[x' \leq x \leq x'', y'_k \leq y \leq y''_k, (k = 1, \dots, m)]$ appartenente a D'_λ e tale che sia $x'' - x' \leq \lambda_n, y''_k - y'_k \leq 2\gamma_n, (k = 1, \dots, m)$, l'oscillazione di ciascuna delle funzioni $\bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m), \bar{z}'_j(x, y_1, \dots, y_m), (j = 1, \dots, r)$ sia non superiore a $\mu_n : 2$;

2^a in base alla condizione (IV), scelto $\varepsilon = \mu_n^{1/\beta}$, la disuguaglianza (6) sia verificata per $z = \bar{z}_j$ e per $z = \bar{z}'_j$ assumendo $\delta_0 = \gamma_n$;

3^a su ogni segmento di estremi $(x'_0, y_1, \dots, y_m), (x''_0, y_1, \dots, y_m)$, avente ampiezza non superiore a λ_n e tale che il rettangolo, a lati paralleli agli assi coordinati, di vertici opposti

$$(x'_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k - \gamma_n, y_{k+1}, \dots, y_m), (x''_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k + \gamma_n, y_{k+1}, \dots, y_m)$$

(9) Da quanto è asserito nel testo è evidente che per $x < 0$ non è richiesta l'esistenza delle $\frac{\partial \bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k}, \frac{\partial \bar{z}'_j(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k}$: questo esplicito rilievo va tenuto presente nel seguito della dimostrazione.

sia tutto costituito di punti di D'_λ , l'oscillazione di ciascuna funzione

$$\frac{1}{2\gamma_n} [Z_j(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k + \gamma_n, y_{k+1}, \dots, y_m) - Z_j(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k - \gamma_n, y_{k+1}, \dots, y_m)], \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m)$$

sia non superiore a μ_n ;

4^a l'integrale definito di ciascuna funzione $L_k(x)$, ($k = 1, \dots, m$) esteso a un qualunque intervallo parziale di $(-\lambda, a')$ avente ampiezza non superiore a λ_n , risulti minore di μ_n .

Posto, per $k = 1, \dots, m$ e per $n = 1, 2, \dots$,

$$(15) \quad L_{kn}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 L_k(x+t) dt, \quad (0 \leq x \leq a'),$$

sia a_n^* il massimo valore di x non superiore ad a' e tale che per $0 \leq x < a_n^*$ risulti

$$\int_0^x L_{kn}(u) du < \frac{b'_k - b_k}{2} - 2\mu_n, \quad (k = 1, \dots, m),$$

e si consideri il campo

$$D_n^*: \quad 0 \leq x \leq a_n^* \quad , \quad b_k + 2\mu_n + \int_0^x L_{kn}(u) du \leq y_k \leq b'_k - 2\mu_n - \int_0^x L_{kn}(u) du, \quad (k = 1, \dots, m),$$

tenendo presente che, come è noto⁽¹⁰⁾, ogni punto di D_n^* appartiene a D' , e che, per $n \rightarrow \infty$, il campo D_n^* tende a D' .

Per $j = 1, \dots, r$ e per $n = 1, 2, \dots$ definiamo le funzioni

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{z}_{jn}(x, y_1, \dots, y_m) &= \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\lambda_n - \gamma_n}^0 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \bar{z}_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m) dt dt_1 \dots dt_m \\ \underline{z}_{jn}(x, y_1, \dots, y_m) &= \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\lambda_n - \gamma_n}^0 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \underline{z}_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m) dt dt_1 \dots dt_m \\ z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m) &= \bar{z}_{jn}(x, y_1, \dots, y_m) - \underline{z}_{jn}(x, y_1, \dots, y_m), \end{aligned} \right.$$

ricordando⁽¹¹⁾ che, per la condizione 4^a, per la disuguaglianza $\gamma_n \leq \mu_n$ e per il modo nel quale è stato definito il campo D_n^* , in questo campo le funzioni $Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)$ risultano definite e continue insieme con le loro derivate parziali prime; inoltre per l'ipotesi (II) e siccome, in virtù dell'ipotesi (III),

(10) Cfr. S. CINQUINI, *N.I.L.*, n. 6, p. 973 e in particolare nota (11).

(11) Cfr. S. CINQUINI, *N.I.L.*, n. 6, p. 974.

le funzioni Z_j sono assolutamente continue rispetto a' ogni singola variabile y_k , ($k = 1, \dots, m$) per quasi tutti gli x e tutti gli $(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$, risulta

$$(17) \quad \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^0 \frac{\partial Z_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)}{\partial x} dt,$$

$$(18) \quad \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k} = \\ = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\lambda_n}^0 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{\partial Z_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)}{\partial y_k} dt_k$$

per $n = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m$.

Inoltre per $n = 1, 2, \dots$ in $0 \leq x \leq a_n^*$ definiamo le funzioni

$$(19) \quad H_{jin}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 H_{ji}(x+t) dt, \quad (j, i = 1, 2, \dots, r),$$

$$(20) \quad \Omega_{jn}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 \left[m H_0(x+t) + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^m H_{ji}(x+t) \omega_{ik}(x+t) \right] dt, \quad (j = 1, \dots, r)$$

$$(21) \quad \Phi_{jn}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m \omega_{jk}(x+t) G_{jkv}(x+t) \Psi_{jv}^3(x+t) dt, \quad (j = 1, \dots, r).$$

Allora dalla (17), tenendo conto delle (1) e (8), segue identicamente nel campo D_n^* per $j = 1, \dots, m; n = 1, 2, \dots$

$$(22) \quad \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial x} = T_{jn}^I + T_{jn}^{II} + T_{jn}^{III} + T_{jn}^{IV},$$

con

$$T_{jn}^I = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^0 \left[f_j \left(\dots; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r; \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_m} \right) - \right. \\ \left. - f_j \left(\dots; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r; \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_m} \right) \right] dt,$$

ove, qui e nel seguito, si intende che la funzione composta f_j è calcolata, sostituendo ovunque $(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)$ a (x, y_1, \dots, y_m) ;

$$T_{jn}^{II} = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^0 \left[\tilde{f}_j \left(\dots; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r; \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_m} \right) - \right. \\ \left. - \tilde{f}_j \left(\dots; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r; \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_m} \right) \right] dt,$$

ove, qui e nel seguito, con la scrittura \tilde{f}_j si indica, che, mentre le derivate parziali $\frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_k}$, $\frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_k}$ sono ancora calcolate nel punto $(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)$, le prime $m+1$ variabili e le funzioni $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r$ sono calcolate in $(x+t, y_1, \dots, y_m)$;

$$T_{jn}^{III} = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^{\circ} \left[f_j \left(\dots; \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r; \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_m} \right) - \right. \\ \left. - \tilde{f}_j \left(\dots; \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r; \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_m} \right) \right] dt,$$

$$T_{jn}^{IV} = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^{\circ} \left[\tilde{f}_j \left(\dots; \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r; \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_m} \right) - \right. \\ \left. - f_j \left(\dots; \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r; \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_m} \right) \right] dt.$$

In virtù della (3) si ha immediatamente

$$|T_{jn}^I| \leq \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^{\circ} \sum_{i=1}^r H_{ji}(x+t) |Z_i(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)| dt,$$

da cui per la condizione 1^a e per le (16) e (19) segue in modo noto ⁽¹²⁾;

$$|T_{jn}^I| \leq \mu_n \sum_{i=1}^r H_{jin}(x) + \sum_{i=1}^r H_{jin}(x) |Z_{in}(x, y_1, \dots, y_m)|.$$

In modo altrettanto immediato, usufruendo ancora della (3) e tenendo conto delle (5), (14) e (20), si ottiene

$$|T_{jn}^{III}| \leq \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^{\circ} \left[H_0(x+t) \sum_{k=1}^m |t_k|^\alpha + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^r H_{ji}(x+t) \sum_{k=1}^m \omega_{ik}(x+t) |t_k| \right] dt \leq \mu_n \Omega_{jn}(x),$$

e così pure

$$|T_{jn}^{IV}| \leq \mu_n \Omega_{jn}(x).$$

Rimane da considerare T_{jn}^H : applicando alla differenza, che figura sotto il segno di integrale, la formula di Taylor relativa alla ultime m variabili, per la (8) tale differenza risulta identicamente uguale a

$$(23) \quad \sum_{k=1}^m \frac{\partial \tilde{f}_j(\dots; \Delta_{j_1}[t], \dots, \Delta_{j_m}[t])}{\partial u_k} \frac{\partial Z_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)}{\partial y_k} + \\ + \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial \tilde{f}_j(\dots; \Delta_{j_1}[t, t_1, \dots, t_m], \dots, \Delta_{j_m}[t, t_1, \dots, t_m])}{\partial u_k} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \tilde{f}_j(\dots; \Delta_{j_1}[t], \dots, \Delta_{j_m}[t])}{\partial u_k} \right] \frac{\partial Z_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)}{\partial y_k},$$

(12) Cfr. S. CINQUINI, *N.I.L.*, pp. 976-977.

ove nelle derivate parziali $\frac{\partial f_j}{\partial u_k}$ le prime $m + 1$ variabili, nonché le $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$ sono calcolate nel punto $(x + t, y_1, \dots, y_m)$, mentre per $j = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, m$ si è posto per brevità

$$(24) \quad \Delta_{jk}[t, t_1, \dots, t_m] = (1 - \theta) \frac{\partial \bar{z}_j(x + t, y_1 + t_1, \dots, y_m + t_m)}{\partial y_k} + \\ + \theta \frac{\partial \bar{z}_j(x + t, y_1 + t_1, \dots, y_m + t_m)}{\partial y_m}$$

con $0 < \theta < 1$, e anche, come caso particolare della (24),

$$\Delta_{jk}[t] = \Delta_{jk}[t, 0, \dots, 0].$$

Rileviamo che, in virtù della condizione 2^a, valgono le disuguaglianze

$$(25) \quad |\Delta_{jk}[t, t_1, \dots, t_m] - \Delta_{jk}[t]| \leq \mu_n^{1/3} \Psi_{jk}^0(x + t), \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m).$$

Ciò premesso, riprendiamo il secondo membro di T_{jn}^{II} e sui due termini, che si ottengono integrando le somme che figurano nell'espressione (23), procediamo rispettivamente nel seguente modo: nel primo, tenute presenti le (3) e (9), per l'integrabilità dei prodotti $2 \omega_{jk}(x) L_k(x)$ in virtù del teorema di Fubini Tonelli possiamo invertire l'ordine delle integrazioni e, dopo aver preso il valore assoluto, usufruiamo della (3); nel secondo, preso senz'altro il valore assoluto, teniamo conto delle (4), (25) e (9). Risulta

$$|T_{jn}^{\text{II}}| \leq \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \left[\int_{-\lambda_n}^0 \sum_{k=1}^m L_k(x + t) dt \right. \\ \left. \cdot \left| \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{\partial Z_j(x + t, y_1 + t_1, \dots, y_m + t_m)}{\partial y_k} dt_k \right| \right] + \\ + 2 \mu_n \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^0 \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m G_{jkv}(x + t) \Psi_{jv}^3(x + t) \omega_{jk}(x + t) dt.$$

Posto

$$R_k[\xi] = \frac{1}{2\gamma_n} [Z_j(\xi, y_1 + t_1, \dots, y_{k-1} + t_{k-1}, y_k + \gamma_n, y_{k+1} + t_{k+1}, \dots, y_m + t_m) - \\ - Z_j(\xi, y_1 + t_1, \dots, y_{k-1} + t_{k-1}, y_k - \gamma_n, y_{k+1} + t_{k+1}, \dots, y_m + t_m)],$$

siccome in virtù dell'ipotesi (III) Z_j risulta funzione assolutamente continua rispetto a ogni singola variabile y_k , ($k = 1, \dots, m$) per quasi tutti gli x

per tutti gli $y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m$, abbiamo identicamente e tenendo conto della (21)

$$\begin{aligned}
 |T_{jn}^{II}| \leq & \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 \sum_{k=1}^m L_k(x+t) dt \left| \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\lambda_n}^0 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{\partial Z_j(x+w, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)}{\partial y_k} dt_1 \dots dt_m \right| + \\
 & + \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 \sum_{k=1}^m L_k(x+t) dt \left[\left| \frac{1}{(2\gamma_n)^{m-1}} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} R_k[x+t] dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \right| - \right. \\
 & \left. - \left| \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^{m-1}} \int_{-\lambda_n}^0 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} R_k[x+w] dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \right| \right] + 2\mu_n \Phi_{jn}(x),
 \end{aligned}$$

e siccome la differenza, che figura entro parentesi quadra, è maggiorata da

$$\left| \frac{1}{(2\gamma_n)^{m-1}} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \left\{ R_k[x+t] - \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 R_k[x+w] dw \right\} \right|,$$

usufruendo del primo teorema della media applicato all'integrazione rispetto a w , della condizione 3^a, nonché delle (15) e (18), risulta

$$|T_{jn}^{II}| \leq \sum_{k=1}^m L_{kn}(x) \left| \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k} \right| + \mu_n \sum_{k=1}^m L_{kn}(x) + 2\mu_n \Phi_{jn}(x).$$

In definitiva dalla (22) segue

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial x} \right| \leq & \sum_{i=1}^r H_{jin}(x) |Z_{in}(x, y_1, \dots, y_m)| + \sum_{k=1}^m L_{kn}(x) \left| \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k} \right| + \\
 & + \left\{ \sum_{i=1}^r H_{jin}(x) + \sum_{k=1}^m L_{kn}(x) + 2[\Phi_{jn}(x) + \Omega_{jn}(x)] \right\} \mu_n,
 \end{aligned}$$

ed è ovvio che, in virtù della continuità di tutte le funzioni, questa disuguaglianza è verificata in ogni punto (x, y_1, \dots, y_m) del campo D_n^* .

A questo punto basta riprendere il ragionamento del n. 2 di *N.I.L.*, per concludere che la (10) ha luogo in tutto il campo D' .

δ) Infine, se è $a' < a$, per provare la (10) in tutto D , si procede nel modo che abbiamo già sviluppato ⁽¹³⁾.

(13) Cfr. S. CINQUINI, luogo cit. per primo in (4), Nota II, n. 5, e), pp. 343-344.