

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

SILVIO CINQUINI

## Sopra un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari. Nota II

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 34 (1963), n.1, p. 27–33.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1963\\_8\\_34\\_1\\_27\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1963_8_34_1_27_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Sopra un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari* (\*). Nota II di SILVIO CINQUINI, presentata (\*\*) dal Socio G. SANSONE.

3. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DEL N. I (8). — a) Infatti, se  $\bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m)$ , ( $j = 1, \dots, r$ );  $\bar{\bar{z}}_j(x, y_1, \dots, y_m)$ , ( $j = 1, \dots, r$ ) sono due integrali del sistema (I) soddisfacenti a tutte le ipotesi enunciate, per semplicità possiamo supporre che le funzioni  $\omega_{jk}(x)$ ,  $\Psi_{jk}(x)$ , ( $j = 1, \dots, r$ ;  $k = 1, \dots, m$ ) siano le stesse per entrambe le soluzioni considerate.

Posto

$$(8) \quad Z_j(x, y_1, \dots, y_m) = \bar{\bar{z}}_j(x, y_1, \dots, y_m) - \bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m), \quad (j = 1, \dots, r),$$

le funzioni  $Z_j(x, y_1, \dots, y_m)$  soddisfano alle ipotesi (I) e (II), e anche alla (III), nella quale alle (5) si sostituiscano le disuguaglianze

$$(9) \quad |Z_j(x, y_1^{[1]}, \dots, y_m^{[1]}) - Z_j(x, y_1^{[2]}, \dots, y_m^{[2]})| \leq 2 \sum_{k=1}^m \omega_{jk}(x) |y_k^{[1]} - y_k^{[2]}|, \\ (j = 1, \dots, r);$$

inoltre in virtù delle (7) in ogni punto  $(y_1, \dots, y_m)$  di  $\Delta$  è  $Z_j(0, y_1, \dots, y_m) = 0$  ( $j = 1, \dots, r$ ).

Per provare l'asserto basta dimostrare che, in ogni punto  $(x, y_1, \dots, y_m)$  del campo D, è

$$(10) \quad Z_j(x, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad (j = 1, \dots, r).$$

$\beta$ ) A tal uopo fissiamo un numero positivo  $a' \leq a$  in modo che siano verificate le disuguaglianze

$$(11) \quad \sum_{j=1}^r e^{\int_0^{a'} H_{jj}(x) dx} \int_0^{a'} H_{ji}(x) dx < 1, \quad (i = 1, \dots, r),$$

ove la scrittura  $\Sigma'$  indica che nella sommatoria va omissa il termine  $j = i$ , e cominciamo a dimostrare che le (10) hanno luogo in tutto il campo

$$D': \quad 0 \leq x \leq a', \quad b_k + \int_0^x L_k(u) du \leq y_k \leq b'_k - \int_0^x L_k(u) du, \quad (k = 1, \dots, m).$$

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Gruppo n. 19).

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1962.

(8) Anche per quanto si riferisce alle notazioni, la presente Nota è la prosecuzione della Nota I. Vedi questi « Rendiconti », vol. XXXIII, pp. 401-404 (1962).

$\gamma$ ) Considerato un numero  $\lambda > 0$ , sia  $D'_\lambda$  il campo costituito da tutti i punti di  $D'$  e da quelli del rettangolo (a  $m + 1$  dimensioni)  $R_\lambda \equiv [-\lambda \leq x < 0, b_k \leq y_k \leq b'_k, (k = 1, \dots, m)]$  e completiamo la definizione delle funzioni  $\bar{z}_j, \bar{z}'_j, f_j$  ponendo in ogni punto  $(x, y_1, \dots, y_m)$  di  $R_\lambda$

$$(12) \quad \bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m) = \bar{z}'_j(x, y_1, \dots, y_m) = \varphi_j(y_1, \dots, y_m), \quad (j = 1, \dots, r),$$

e anche per ogni  $(m + r)$ -pla  $(z_1, \dots, z_r; u_1, \dots, u_m)$

$$(13) \quad f_j(x, y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_r; u_1, \dots, u_m) = 0, \quad (j = 1, \dots, r).$$

Inoltre nell'intervallo  $-\lambda \leq x < 0$  definiamo

$$L_k(x) = G_{ik\nu}(x) = H_0(x) = H_{ji}(x) = \omega_{ik}(x) = \Psi_{ik}(x) = 0$$

per  $k, \nu = 1, \dots, m; j, i = 1, \dots, r$ .

Nel rettangolo  $R_\lambda$  in virtù delle (13) il sistema (1) si riduce a

$$\frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial x} = 0, \quad (j = 1, \dots, r),$$

e quindi le  $r$ -ple di funzione  $\bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m), (j = 1, \dots, r); \bar{z}'_j(x, y_1, \dots, y_m), (j = 1, \dots, r)$  sono soluzioni di tale sistema <sup>(9)</sup>; per le (12) è  $Z_j(x, y_1, \dots, y_m) = \frac{\partial Z_j}{\partial x} = \frac{\partial Z_j}{\partial y_k} = 0, (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m)$ , e infine, sempre in  $R_\lambda$ , sono verificate anche le (3) e (4).

Ciò premesso, sia  $\mu_n, (n = 1, 2, \dots)$  (con  $\mu_1 \leq 1; 4\mu_1 < b'_k - b_k, (k = 1, \dots, m)$ ) una successione di numeri reali positivi, decrescenti e tendenti a zero, alla quale subordiniamo successivamente due altre successioni di numeri reali positivi, decrescenti e tendenti a zero  $\gamma_n, (n = 1, 2, \dots); \lambda_n, (n = 1, 2, \dots)$  (ove  $\lambda_1 < \lambda$ ) con

$$(14) \quad \lambda_n \leq \gamma_n \leq \gamma_n^\alpha \leq \mu_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1<sup>a</sup> in ogni rettangolo (a  $r + 1$  dimensioni)  $[x' \leq x \leq x'', y'_k \leq y \leq y''_k, (k = 1, \dots, m)]$  appartenente a  $D'_\lambda$  e tale che sia  $x'' - x' \leq \lambda_n, y''_k - y'_k \leq 2\gamma_n, (k = 1, \dots, m)$ , l'oscillazione di ciascuna delle funzioni  $\bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m), \bar{z}'_j(x, y_1, \dots, y_m), (j = 1, \dots, r)$  sia non superiore a  $\mu_n : 2$ ;

2<sup>a</sup> in base alla condizione (IV), scelto  $\varepsilon = \mu_n^{1/\beta}$ , la disuguaglianza (6) sia verificata per  $z = \bar{z}_j$  e per  $z = \bar{z}'_j$  assumendo  $\delta_0 = \gamma_n$ ;

3<sup>a</sup> su ogni segmento di estremi  $(x'_0, y_1, \dots, y_m), (x''_0, y_1, \dots, y_m)$ , avente ampiezza non superiore a  $\lambda_n$  e tale che il rettangolo, a lati paralleli agli assi coordinati, di vertici opposti

$$(x'_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k - \gamma_n, y_{k+1}, \dots, y_m), (x''_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k + \gamma_n, y_{k+1}, \dots, y_m)$$

(9) Da quanto è asserito nel testo è evidente che per  $x < 0$  non è richiesta l'esistenza delle  $\frac{\partial \bar{z}_j(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k}, \frac{\partial \bar{z}'_j(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k}$ : questo esplicito rilievo va tenuto presente nel seguito della dimostrazione.

sia tutto costituito di punti di  $D'_\lambda$ , l'oscillazione di ciascuna funzione

$$\frac{1}{2\gamma_n} [Z_j(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k + \gamma_n, y_{k+1}, \dots, y_m) - Z_j(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k - \gamma_n, y_{k+1}, \dots, y_m)], \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m)$$

sia non superiore a  $\mu_n$ ;

4ª l'integrale definito di ciascuna funzione  $L_k(x)$ , ( $k = 1, \dots, m$ ) esteso a un qualunque intervallo parziale di  $(-\lambda, a')$  avente ampiezza non superiore a  $\lambda_n$ , risulti minore di  $\mu_n$ .

Posto, per  $k = 1, \dots, m$  e per  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$(I5) \quad L_{kn}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 L_k(x+t) dt, \quad (0 \leq x \leq a'),$$

sia  $a_n^*$  il massimo valore di  $x$  non superiore ad  $a'$  e tale che per  $0 \leq x < a_n^*$  risulti

$$\int_0^x L_{kn}(u) du < \frac{b'_k - b_k}{2} - 2\mu_n, \quad (k = 1, \dots, m),$$

e si consideri il campo

$$D_n^*: \quad 0 \leq x \leq a_n^* \quad , \quad b_k + 2\mu_n + \int_0^x L_{kn}(u) du \leq y_k \leq b'_k - 2\mu_n - \int_0^x L_{kn}(u) du, \quad (k = 1, \dots, m),$$

tenendo presente che, come è noto<sup>(10)</sup>, ogni punto di  $D_n^*$  appartiene a  $D'$ , e che, per  $n \rightarrow \infty$ , il campo  $D_n^*$  tende a  $D'$ .

Per  $j = 1, \dots, r$  e per  $n = 1, 2, \dots$  definiamo le funzioni

$$(I6) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{z}_{jn}(x, y_1, \dots, y_m) &= \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\lambda_n - \gamma_n}^0 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \bar{z}_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m) dt dt_1 \dots dt_m \\ \underline{\bar{z}}_{jn}(x, y_1, \dots, y_m) &= \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\lambda_n - \gamma_n}^0 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \underline{\bar{z}}_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m) dt dt_1 \dots dt_m \\ Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m) &= \bar{z}_{jn}(x, y_1, \dots, y_m) - \underline{\bar{z}}_{jn}(x, y_1, \dots, y_m), \end{aligned} \right.$$

ricordando<sup>(11)</sup> che, per la condizione 4ª, per la disuguaglianza  $\gamma_n \leq \mu_n$  e per il modo nel quale è stato definito il campo  $D_n^*$ , in questo campo le funzioni  $Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)$  risultano definite e continue insieme con le loro derivate parziali prime; inoltre per l'ipotesi (II) e siccome, in virtù dell'ipotesi (III),

(10) Cfr. S. CINQUINI, *N.I.L.*, n. 6, p. 973 e in particolare nota (11).

(11) Cfr. S. CINQUINI, *N.I.L.*, n. 6, p. 974.

le funzioni  $Z_j$  sono assolutamente continue rispetto a' ogni singola variabile  $y_k$ , ( $k = 1, \dots, m$ ) per quasi tutti gli  $x$  e tutti gli  $(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m)$ , risulta

$$(17) \quad \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^0 \frac{\partial Z_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)}{\partial x} dt,$$

$$(18) \quad \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k} = \\ = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\lambda_n}^0 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{\partial Z_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)}{\partial y_k} dt_k$$

per  $n = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m$ .

Inoltre per  $n = 1, 2, \dots$  in  $0 \leq x \leq a_n^*$  definiamo le funzioni

$$(19) \quad H_{jin}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 H_{ji}(x+t) dt, \quad (j, i = 1, 2, \dots, r),$$

$$(20) \quad \Omega_{jn}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 \left[ m H_0(x+t) + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^m H_{ji}(x+t) \omega_{ik}(x+t) \right] dt, \quad (j = 1, \dots, r)$$

$$(21) \quad \Phi_{jn}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m \omega_{jk}(x+t) G_{jkv}(x+t) \Psi_{jv}^3(x+t) dt, \quad (j = 1, \dots, r).$$

Allora dalla (17), tenendo conto delle (1) e (8), segue identicamente nel campo  $D_n^*$  per  $j = 1, \dots, m; n = 1, 2, \dots$

$$(22) \quad \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial x} = T_{jn}^I + T_{jn}^{II} + T_{jn}^{III} + T_{jn}^{IV},$$

con

$$T_{jn}^I = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^0 \left[ f_j \left( \dots; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r; \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_m} \right) - \right. \\ \left. - f_j \left( \dots; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r; \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_m} \right) \right] dt,$$

ove, qui e nel seguito, si intende che la funzione composta  $f_j$  è calcolata, sostituendo ovunque  $(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)$  a  $(x, y_1, \dots, y_m)$ ;

$$T_{jn}^{II} = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^0 \left[ \tilde{f}_j \left( \dots; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r; \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_m} \right) - \right. \\ \left. - \tilde{f}_j \left( \dots; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r; \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial y_m} \right) \right] dt,$$

ove, qui e nel seguito, con la scrittura  $\tilde{f}_j$  si indica, che, mentre le derivate parziali  $\frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_k}$ ,  $\frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_k}$  sono ancora calcolate nel punto  $(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)$ , le prime  $m+1$  variabili e le funzioni  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r$  sono calcolate in  $(x+t, y_1, \dots, y_m)$ ;

$$T_{jn}^{III} = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^{\circ} \left[ f_j \left( \dots; \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r; \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_m} \right) - \right. \\ \left. - \tilde{f}_j \left( \dots; \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r; \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_m} \right) \right] dt,$$

$$T_{jn}^{IV} = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^{\circ} \left[ \tilde{f}_j \left( \dots; \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r; \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_m} \right) - \right. \\ \left. - f_j \left( \dots; \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r; \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{z}_j}{\partial y_m} \right) \right] dt.$$

In virtù della (3) si ha immediatamente

$$|T_{jn}^I| \leq \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^{\circ} \sum_{i=1}^r H_{ji}(x+t) |Z_i(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)| dt,$$

da cui per la condizione 1<sup>a</sup> e per le (16) e (19) segue in modo noto <sup>(12)</sup>;

$$|T_{jn}^I| \leq \mu_n \sum_{i=1}^r H_{jin}(x) + \sum_{i=1}^r H_{jin}(x) |Z_{in}(x, y_1, \dots, y_m)|.$$

In modo altrettanto immediato, usufruendo ancora della (3) e tenendo conto delle (5), (14) e (20), si ottiene

$$|T_{jn}^{III}| \leq \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^{\circ} \left[ H_0(x+t) \sum_{k=1}^m |t_k|^\alpha + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^r H_{ji}(x+t) \sum_{k=1}^m \omega_{ik}(x+t) |t_k| \right] dt \leq \mu_n \Omega_{jn}(x),$$

e così pure

$$|T_{jn}^{IV}| \leq \mu_n \Omega_{jn}(x).$$

Rimane da considerare  $T_{jn}^H$ : applicando alla differenza, che figura sotto il segno di integrale, la formula di Taylor relativa alla ultime  $m$  variabili, per la (8) tale differenza risulta identicamente uguale a

$$(23) \quad \sum_{k=1}^m \frac{\partial \tilde{f}_j(\dots; \Delta_{j_1}[t], \dots, \Delta_{j_m}[t])}{\partial u_k} \frac{\partial Z_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)}{\partial y_k} + \\ + \sum_{k=1}^m \left[ \frac{\partial \tilde{f}_j(\dots; \Delta_{j_1}[t, t_1, \dots, t_m], \dots, \Delta_{j_m}[t, t_1, \dots, t_m])}{\partial u_k} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \tilde{f}_j(\dots; \Delta_{j_1}[t], \dots, \Delta_{j_m}[t])}{\partial u_k} \right] \frac{\partial Z_j(x+t, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)}{\partial y_k},$$

(12) Cfr. S. CINQUINI, *N.I.L.*, pp. 976-977.

ove nelle derivate parziali  $\frac{\partial f_j}{\partial u_k}$  le prime  $m + 1$  variabili, nonché le  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$  sono calcolate nel punto  $(x + t, y_1, \dots, y_m)$ , mentre per  $j = 1, \dots, r$ ;  $k = 1, \dots, m$  si è posto per brevità

$$(24) \quad \Delta_{jk}[t, t_1, \dots, t_m] = (1 - \theta) \frac{\partial \bar{z}_j(x + t, y_1 + t_1, \dots, y_m + t_m)}{\partial y_k} + \\ + \theta \frac{\partial \bar{z}_j(x + t, y_1 + t_1, \dots, y_m + t_m)}{\partial y_m}$$

con  $0 < \theta < 1$ , e anche, come caso particolare della (24),

$$\Delta_{jk}[t] = \Delta_{jk}[t, 0, \dots, 0].$$

Rileviamo che, in virtù della condizione 2<sup>a</sup>, valgono le disuguaglianze

$$(25) \quad |\Delta_{jk}[t, t_1, \dots, t_m] - \Delta_{jk}[t]| \leq \mu_n^{1/3} \Psi_{jk}^0(x + t), \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m).$$

Ciò premesso, riprendiamo il secondo membro di  $T_{jn}^{\text{II}}$  e sui due termini, che si ottengono integrando le somme che figurano nell'espressione (23), procediamo rispettivamente nel seguente modo: nel primo, tenute presenti le (3) e (9), per l'integrabilità dei prodotti  $2 \omega_{jk}(x) L_k(x)$  in virtù del teorema di Fubini Tonelli possiamo invertire l'ordine delle integrazioni e, dopo aver preso il valore assoluto, usufruiamo della (3); nel secondo, preso senz'altro il valore assoluto, teniamo conto delle (4), (25) e (9). Risulta

$$|T_{jn}^{\text{II}}| \leq \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \left[ \int_{-\lambda_n}^0 \sum_{k=1}^m L_k(x + t) dt \right. \\ \left. \cdot \left| \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{\partial Z_j(x + t, y_1 + t_1, \dots, y_m + t_m)}{\partial y_k} dt_k \right| \right] + \\ + 2 \mu_n \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_m \int_{-\lambda_n}^0 \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^m G_{jkv}(x + t) \Psi_{jv}^3(x + t) \omega_{jk}(x + t) dt.$$

Posto

$$R_k[\xi] = \frac{1}{2\gamma_n} [Z_j(\xi, y_1 + t_1, \dots, y_{k-1} + t_{k-1}, y_k + \gamma_n, y_{k+1} + t_{k+1}, \dots, y_m + t_m) - \\ - Z_j(\xi, y_1 + t_1, \dots, y_{k-1} + t_{k-1}, y_k - \gamma_n, y_{k+1} + t_{k+1}, \dots, y_m + t_m)],$$

siccome in virtù dell'ipotesi (III)  $Z_j$  risulta funzione assolutamente continua rispetto a ogni singola variabile  $y_k$ , ( $k = 1, \dots, m$ ) per quasi tutti gli  $x$

per tutti gli  $y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m$ , abbiamo identicamente e tenendo conto della (21)

$$\begin{aligned}
 |T_{jn}^{II}| \leq & \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 \sum_{k=1}^m L_k(x+t) dt \left| \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^m} \int_{-\lambda_n}^0 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{\partial Z_j(x+w, y_1+t_1, \dots, y_m+t_m)}{\partial y_k} dt_1 \dots dt_m \right| + \\
 & + \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 \sum_{k=1}^m L_k(x+t) dt \left[ \left| \frac{1}{(2\gamma_n)^{m-1}} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} R_k[x+t] dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \right| - \right. \\
 & \left. - \left| \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{(2\gamma_n)^{m-1}} \int_{-\lambda_n}^0 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} R_k[x+w] dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \right| \right] + 2\mu_n \Phi_{jn}(x),
 \end{aligned}$$

e siccome la differenza, che figura entro parentesi quadra, è maggiorata da

$$\left| \frac{1}{(2\gamma_n)^{m-1}} \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \dots \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_m \left\{ R_k[x+t] - \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 R_k[x+w] dw \right\} \right|,$$

usufruendo del primo teorema della media applicato all'integrazione rispetto a  $w$ , della condizione 3<sup>a</sup>, nonché delle (15) e (18), risulta

$$|T_{jn}^{II}| \leq \sum_{k=1}^m L_{kn}(x) \left| \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k} \right| + \mu_n \sum_{k=1}^m L_{kn}(x) + 2\mu_n \Phi_{jn}(x).$$

In definitiva dalla (22) segue

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial x} \right| \leq & \sum_{i=1}^r H_{jin}(x) |Z_{in}(x, y_1, \dots, y_m)| + \sum_{k=1}^m L_{kn}(x) \left| \frac{\partial Z_{jn}(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k} \right| + \\
 & + \left\{ \sum_{i=1}^r H_{jin}(x) + \sum_{k=1}^m L_{kn}(x) + 2[\Phi_{jn}(x) + \Omega_{jn}(x)] \right\} \mu_n,
 \end{aligned}$$

ed è ovvio che, in virtù della continuità di tutte le funzioni, questa disuguaglianza è verificata in ogni punto  $(x, y_1, \dots, y_m)$  del campo  $D_n^*$ .

A questo punto basta riprendere il ragionamento del n. 2 di *N.I.L.*, per concludere che la (10) ha luogo in tutto il campo  $D'$ .

δ) Infine, se è  $a' < a$ , per provare la (10) in tutto  $D$ , si procede nel modo che abbiamo già sviluppato <sup>(13)</sup>.

(13) Cfr. S. CINQUINI, luogo cit. per primo in (4), Nota II, n. 5, e), pp. 343-344.