Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Claudio Di Comite

Su k-archi deducibili da cubiche piane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.6, p. 429–435.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_6_429_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Geometria. — *Su k-archi deducibili da cubiche piane* (*). Nota di CLAUDIO DI COMITE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

In un piano lineare $S_{2,q}$ sopra un corpo finito σ di ordine $q = p^h$ (p–primo), ci si serve sovente di curve algebriche per costruire k–archi. In particolare, le coniche sono $(q+1)$–archi (B. Segre [7]), completi se q è dispari (B. Segre [9]), incompleti se q è pari (B. Segre [8]); in quest'ultimo caso (B. Segre [8]), da esse si ottengono infatti $(q+2)$–archi (completi) mediante l'aggiunta di un punto opportuno (nucleo della conica); curve algebriche di ordine maggiore di due intervengono nella costruzione (B. Segre [8]) di $(q+2)$–archi ($q = p^h$, $h = 5$ o $h \geq 7$) non contenenti una conica; e mediante coniche si costruiscono (L. Lombardo Radice [3]) $(q+5)/2$–archi completi (q dispari e $q \equiv 3 \pmod 4$).

In questa Nota, si sfruttano alcune proprietà elementari delle cubiche cuspidate per costruire 8–archi completi di $S_{2,11}$ e 10–archi completi di $S_{2,17}$; nel contempo si dà una caratterizzazione delle C^3 cuspidate di $S_{2,5}$; infine si fa vedere come i suddetti k–archi possono costruirsi mediante gruppi armonici, indipendentemente dalle C^3.

1. ALCUNI RICHIAMI SULLE C^3 CUSPIDATE DI $S_{2,q}$. – Nel piano proiettivo $S_{2,q}$ sopra il campo finito σ di caratteristica $p \neq 2,3$ (1) ed ordine $q = p^h$, si consideri una cubica K sopra σ avente una cuspide, necessariamente in un punto C di $S_{2,q}$.

Ogni retta di $S_{2,q}$ passante per C e distinta dalla tangente cuspidale interseca K, oltre che in C, in uno ed un solo punto, necessariamente sul campo σ; ne segue che il numero dei punti di $S_{2,q}$ appartenenti a K è $q+1$.

Poiché l'ordine di K è minore di p ($p \neq 2,3$), è lecito servirsi nello studio di K delle formule di Plücker, purché si tenga conto anche degli elementi (punti e rette) che non sono sul campo base. Si conclude così che la classe di K è 3 e che K possiede uno ed un solo flesso, F. F è l'unico punto d'intersezione di K con la sua hessiana distinto dalla cuspide, ond'è necessariamente sul campo base.

Con scelta opportuna del riferimento in $S_{2,q}$ (2), si può dare di K la seguente rappresentazione parametrica:

$$(1.1) \qquad x = \lambda \quad , \quad y = 1 \quad , \quad z = \lambda^3 \qquad \text{con } \lambda \in \sigma^*,$$

essendo σ^* l'insieme costituito dagli elementi di σ e dall'∞.

(*) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 1 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1961–62. In esso traggo le mosse dalla mia tesi di laurea, discussa con il prof. V. Dalla Volta, ed espongo alcuni risultati ai quali sono stato indirizzato dal prof. B. Segre.

(**) Nella seduta del 15 dicembre 1962.

(1) Per il seguito, anche se non detto esplicitamente, si supporrà sempre $p \neq 2, 3$.

(2) Si prenda $O_3 = C$, $O_2 = F$, O_1 nel punto d'intersezione della tangente cuspidale con la tangente inflessionale ed U appartenente a K.

Per $\lambda = \infty$ si ha la cuspide, per $\lambda = 0$ il flesso, e quindi per $\lambda \in \sigma - 0$ si hanno i $q-1$ punti di $S_{2,q}$ appartenenti a K e distinti dalla cuspide e dal flesso.

Tre punti di K di parametro rispettivamente λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \sigma$ sono allineati se e soltanto se è $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Ne segue in particolare che sono allineate col flesso di K coppie di punti di K corrispondenti a valori opposti del parametro; e che il tangenziale di un punto di K di parametro $\lambda \in \sigma - 0$ è il punto di parametro $-2\lambda \, (\in \sigma - 0)$.

2. INSIEMI CICLICI DI PUNTI DI $S_{2,q}$. – Si consideri un elemento $\lambda_1 \in \sigma - 0$, e si indichino con P_j $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ i punti di K di parametro rispettivamente $(-2)^j \lambda_1$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$. I punti P_j sono distinti dalla cuspide e dal flesso; risulta $P_{j_1} = P_{j_2}$ se e soltanto se è $j_1 \equiv j_2 \pmod{k}$, essendo k il minimo intero positivo tale che risulti $(-2)^k \equiv 1 \pmod{p}$, cioè $k = \mathrm{gss}(p, -2)$; inoltre, per ogni $j = 0, 1, 2, \cdots$, il tangenziale del punto P_j è il punto P_{j+1}. $P_0, P_1, \cdots, P_{k-1}$ sono quindi k punti distinti di $S_{2,q}$ appartenenti a K, diversi dalla cuspide e dal flesso; ciascuno di essi, a partire dal secondo, è il tangenziale del precedente, il primo essendo il tangenziale dell'ultimo; essi cioè si susseguono ciclicamente, considerando come successivo di un punto il suo tangenziale [3].

Definizione. – Si dirà che un insieme di punti quali i suddetti $P_0, P_1, \cdots, P_{k-1}$ è un *insieme ciclico* di punti di $S_{2,q}$ contenuto in K.

Gli elementi $(-2)^j$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ costituiscono un sottogruppo ciclico γ del gruppo moltiplicativo di σ, e quindi gli elementi $(-2)^j \lambda_1$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ costituiscono una classe laterale di γ nel gruppo moltiplicativo di σ.

Segue allora subito che:

I) *Se* K *è una qualsiasi* C^3 *cuspidata di* $S_{2,q}$ $(p \neq 2, 3)$, *e* $\bar{K}$ *è l'insieme dei* $q-1$ *punti di* $S_{2,q}$ *appartenenti a* K *e distinti dalla cuspide e dal flesso, esiste una partizione di* $\bar{K}$ *tale che ciascuna parte sia costituita da un insieme ciclico di punti.*

Se k è pari si ha $(-2)^{k/2} \equiv -1 \pmod{p}$, quindi per ogni $\lambda \in \sigma$ risulta $\lambda + (-2)^{k/2} \lambda = 0$, sicché:

II) *Se k è pari, sono allineati col flesso un punto qualsiasi di* $\bar{K}$ *ed il punto che si ottiene a partire da esso mediante $k/2$ successivi passaggi al tangenziale.*

Se k è dispari l'elemento $-1 \in \sigma$ non appartiene a γ, quindi per ogni $\lambda \in \sigma - 0$ le due classi $\lambda\gamma$ e $-\lambda\gamma$ sono distinte; perché, se coincidessero, l'elemento -1 apparterrebbe a γ. Si conclude che:

III) *Se k è dispari, le rette che dal flesso proiettano i k punti di un insieme ciclico di* K *intersecano ulteriormente* K *nei k punti di un altro insieme ciclico.*

(3) Per l'analogia con il piano proiettivo complesso, si veda l'osservazione di E. Weyr riportata da E. BERTINI [1], p. 161.

Sia H un insieme ciclico di punti di $S_{2,q}$, contenuto in K, e sia P un punto appartenente ad H (si può sempre supporre, senza ledere la generalità, che H sia costituito dai punti P_j e P sia il punto P_0). Per la condizione di allineamento di tre punti di K risulta subito che il numero s_3 delle trisecanti (ved. A. Cossu [2], n. 1, II def.) di H passanti per P è uguale al numero delle coppie non ordinate di interi j_1, j_2 con $0 < j_1 < k$, $0 < j_2 < k$, $j_1 \neq j_2$ tali che sia

$$1 + (-2)^{j_1} + (-2)^{j_2} \equiv 0 \pmod{p};$$

quindi s_3 *dipende soltanto dalla caratteristica* p *di* σ.

Se s_2 è il numero delle bisecanti di H passanti per P, si ha

$$s_2 + 2 s_3 = k - 1; \tag{2.1}$$

sicché *anche* s_2 *dipende soltanto da* p.

Tra le bisecanti di H passanti per P vi sono le due tangenti a K passanti per P e, se k è pari (ved. prop. II), la retta congiungente P col flesso di K; ogni altra bisecante di H passante per P è una trisecante di $\overline{K}$ e quindi una unisecante di un insieme ciclico di punti di $\overline{K}$ distinto da H. D'altronde, se s_1 è il numero delle unisecanti di H passanti per P, si ha:

$$s_1 + s_2 + s_3 = q + 1. \tag{2.2}$$

In particolare, la retta congiungente P con la cuspide di K è unisecante di H; la retta congiungente P con il flesso di K è unisecante di H se, e soltanto se, k è dispari; le due tangenti a K passanti per P non sono unisecanti di H; ogni altra retta di $S_{2,q}$ passante per P o è unisecante di $\overline{K}$, ed in tal caso è anche unisecante di H, oppure è una trisecante di $\overline{K}$, ed in tal caso essa è unisecante di H se, e soltanto se, è di uno dei seguenti due tipi:

a) retta intersecante $\overline{K}$ in P ed in altri due punti appartenenti ad uno stesso insieme ciclico di punti distinto da H;

b) retta intersecante $\overline{K}$ in P ed in altri due punti appartenenti a due distinti insiemi ciclici di punti (diversi da H).

Il numero delle unisecanti di $\overline{K}$ passanti per P è poi manifestamente $(q-1)/2$.

Il numero t delle rette del tipo *a*) è uguale al numero delle terne ordinate costituite da due interi j_1, j_2 con $j_1 < j_2$, $0 \leq j_1 < k$, $0 \leq j_2 < k$ e da un elemento $\lambda \notin \gamma$ tali che sia

$$1 + ((-2)^{j_1} + (-2)^{j_2})\,\lambda = 0;$$

se j_1, j_2, λ è una qualunque terna per cui sia verificata la precedente relazione, λ appartiene necessariamente al campo fondamentare di σ; e quindi, poiché l'ordine di detto campo è p e poiché k dipende solo da p, *anche il numero* t *dipende soltanto da* p.

Contando in due modi diversi le trisecanti di $\overline{K}$ che sono bisecanti per un insieme ciclico di punti ed unisecanti per un altro di detti insiemi, si ottiene, se k è pari,

$$(s_2 - 3)(q-1)/2 = t(q-1),$$

cioè

$$t = (s_2 - 3)/2 \; ; \tag{2.3}$$

analogamente, se k è dispari,

$$t = (s_2 - 2)/2. \tag{2.4}$$

Pertanto, indicando con u il numero delle rette del tipo b) e tenendo conto delle (2.3), (2.4), si ha, se k è pari,

$$s_1 = 1 + (q - 1)/2 + (s_2 - 3)/2 + u \; ; \tag{2.5}$$

e, se k è dispari,

$$s_1 = 2 + (q - 1)/2 + (s_2 - 2)/2 + u. \tag{2.6}$$

Dalle (2.2), (2.5), (2.6) si trae:

$$3 s_2 + 2 s_3 + 2 u = q + 4, \quad \text{se } k \text{ è pari,} \tag{2.7}$$

$$3 s_2 + 2 s_3 + 2 u = q + 1, \quad \text{se } k \text{ è dispari.} \tag{2.8}$$

Ricordando che s_2 ed s_3 dipendono soltanto da p, si deduce da queste relazioni che *u dipende soltanto da $q = p^h$*; e, indicando con $\bar{u}$ il valore di u per $h = 1$, si ha:

$$3 s_2 + 2 s_3 + 2 \bar{u} = p + 4, \quad \text{se } k \text{ è pari,} \tag{2.9}$$

$$3 s_2 + 2 s_3 + 2 \bar{u} = p + 1, \quad \text{se } k \text{ è dispari.} \tag{2.10}$$

Poiché, per ogni C^3 cuspidata di $S_{2,q}$, il numero degli insiemi ciclici di punti di $S_{2,q}$ contenuti nella C^3 è uguale a $(q - 1)/k$, nell'ipotesi che sia $k = p - 1$ oppure $k = (p - 1)/2$ risulta $\bar{u} = 0$ [4]; in tal caso, la (2.9) se k è pari oppure la (2.10) se k è dispari, assieme alla (2.1), permette di determinare s_2 ed s_3.

Si ottengono al riguardo le seguenti tre possibilità:

(I) $k = p - 1$ ($p - 1$ è ovviamente pari): $s_2 = 3$, $s_3 = (p - 5)/2$;

(II) $k = (p - 1)/2$, $(p - 1)/2$ dispari : $s_2 = (p + 5)/4$, $s_3 = (p - 11)/8$

(III) $k = (p - 1)/2$, $(p - 1)/2$ pari : $s_2 = (p + 11)/4$, $s_3 = (p - 17)/8$

Poiché è gss $(5 , - 2) = 4$, gss $(11 , - 2) = 5$, gss $(17 , - 2) = 8$, si conclude in particolare che:

IV) *In un $S_{2,q}$ ($q = p^h$, $p \neq 2 , 3$) gli insiemi ciclici di punti contenuti in una C^3 cuspidata sono dei k–archi ($k =$ gss $(p , - 2)$), se è $p = 5$ o $p = 11$ o $p = 17$; non lo sono di certo se è $p \neq 5$ e $k = p - 1$ o $p \neq 11 , 17$ e $k = (p - 1)/2$* [5].

(4) Servendosi del calcolatore elettronico I.B.M. 1620 della Università di Bari, il dott. R. Infantino ha calcolato gss $(p , - 2)$ per ogni p primo minore di 1000. Si osserva così ad esempio che per $p < 100$, eccettuati i valori $p = 31 , 43 , 73 , 89$, si ha sempre gss $(p , - 2) = p - 1$, oppure gss $(p, - 2) = (p - 1)/2$.

(5) Rimarrebbero da esaminare i casi in cui è $k \neq p - 1$ e $k \neq (p - 1)/2$.

3. UNA CARATTERIZZAZIONE DELLE C^3 CUSPIDATE DI $S_{2,5}$. – Si cominci con l'osservare che in generale:

V) *Se* K *è una* C^3 *cuspidata di* $S_{2,q}$ $(p \neq 2, 3)$ *ed è* $q \not\equiv 1 \pmod 3$, *non esistono coppie di punti di* $S_{2,q}$ *appartenenti a* K *allineati col punto d'intersezione della tangente cuspidale con la tangente inflessionale.*

Infatti, se per assurdo (ved. (1.1)) i punti di parametro rispettivamente λ_1 e λ_2 $(\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma - 0, \lambda_1 \neq \lambda_2)$ fossero allineati col punto d'intersezione della tangente cuspidale con la tangente inflessionale, si avrebbe $(\lambda_1 \lambda_2^{-1})^3 = 1$; e ciò è assurdo, in quanto $\lambda_1 \lambda_2^{-1} \neq 1$ e $q \not\equiv 1 \pmod 3$.

Proveremo poscia che:

VI) *Se* K *è una qualsiasi* C^3 *cuspidata di* $S_{2,5}$, *l'insieme costituito dal punto d'intersezione della tangente cuspidale con la tangente inflessionale e dai punti di* $S_{2,5}$ *appartenenti a* K *e distinti dal flesso è una conica irriducibile, rispetto alla quale il flesso ha come polare la tangente cuspidale.*

Infatti, per la IV, i punti di $S_{2,5}$ appartenenti a K e distinti dalla cuspide C e dal flesso F costituiscono un 4–arco; aggregando C al 4–arco si ottiene un 5–arco; ed aggregando al 5–arco il punto d'intersezione della tangente cuspidale c con la tangente inflessionale f, per la V, si ottiene un 6–arco, cioè, in virtù del 1° teorema di B. Segre [4], [5] sui k-archi, una conica irriducibile di $S_{2,5}$.

È subito visto, inoltre, che le rette FC ed f sono tangenti alla conica, rispettivamente in C ed in $c \cap f$, e quindi la retta c è la polare di F.

Viceversa, proveremo ora che:

VII) *Comunque si scelgano in* $S_{2,5}$ *una conica irriducibile ed un punto* F *ad essa esterno, detti* C *e* C' *i punti d'intersezione della polare di* F *con la conica, il* $\{6,3\}$*-arco* (6) *di* $S_{2,5}$ *costituito da* F *e dai punti della conica distinti da* C' (C) *è una cubica cuspidata di* $S_{2,5}$ *avente* C (C') *come cuspide, con tangente cuspidale la polare di* F, *ed* F *come flesso, con tangente inflessionale la retta* FC' (FC).

Infatti, assegnati in $S_{2,5}$ una conica irriducibile ed un punto F ad essa esterno e detti C e C' i punti di cui all'enunciato, si consideri la cubica di $S_{2,5}$ avente C come cuspide, con tangente cuspidale CC', F come flesso, con tangente inflessionale FC', e contenente un punto P della conica scelto ad arbitrio fra i quattro punti della conica diversi da C e C'. Fissato il riferimento in $S_{2,5}$ come al n. 1 assumento U = P, i tre punti della C^3 diversi da C, F, P si ottengono dalle (1.1) per $\lambda = 2, 3, 4$.

D'altra parte, in tale riferimento la C^2 ha l'equazione $y^2 - xz = 0$ e, poiché per ogni $\lambda = 2, 3, 4$ risulta $\lambda^4 \equiv 1 \pmod 5$, resta verificato che i tre punti della C^3 diversi da C, F, P appartengono alla C^2, e sono quindi proprio i tre punti della C^2 diversi da C, C', P.

4. 8–ARCHI COMPLETI DI $S_{2,11}$ E 10–ARCHI COMPLETI DI $S_{2,17}$. – Ci proponiamo di mostrare che:

(6) Ved. A. COSSU [2], n. 1, I def.

VIII) *Se* K *è una* C^3 *cuspidata di* $S_{2,11}$ *e* K_1, K_2 *sono i due* 5*–archi ciclici di* $S_{2,11}$ *contenuti in* K, *aggregando a* K_1 (K_2) *la cuspide, il flesso ed il punto d'intersezione della tangente cuspidale con la tangente inflessionale si ottiene un* 8*–arco completo di* $S_{2,11}$.

Infatti, si fissi in $S_{2,11}$ un riferimento proiettivo come al n. 1, scegliendo come punto unità un punto di K_1. In tale riferimento, i punti di K_1 (cfr. il n. 2) si ottengono per $\lambda = (-2)^j$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$; e, facendo sì ch'essi abbiano la terza coordinata uguale all'unità, le prime due coordinate di ciascuno di essi diventano $(-2)^{-2j}$ e $(-2)^{2j}$ (quadrati in γ_{11}); detti punti appartengono quindi alla conica $xy - z^2 = 0$ e costituiscono (L. Lombardo Radice [3]; B. Segre [10], n. 176, p. 281) il ramo dei quadrati della medesima; da ciò segue l'asserto.

Sussiste inoltre la seguente proposizione:

IX) *Se* K *è una* C^3 *cuspidata di* $S_{2,17}$ *e* K_1, K_2 *sono i due* 8*–archi ciclici di* $S_{2,17}$ *contenuti in* K, *aggregando a* K_1 (K_2) *la cuspide ed il punto d'intersezione della tangente cuspidale con la tangente inflessionale si ottiene un* 10*–arco completo di* $S_{2,17}$.

È subito visto, invero (cfr. anche la V), che l'insieme costituito dai punti di K_1, dalla cuspide C e dal punto d'intersezione della tangente cuspidale con la tangente inflessionale è un 10–arco.

Quanto a provare ch'esso è completo, ci si asterrà qui di farlo per brevità, poiché trattasi di una semplice verifica da condursi con opportuni accorgimenti atti ad abbreviare i calcoli.

5. COSTRUZIONE MEDIANTE GRUPPI ARMONICI DEGLI INSIEMI CICLICI DI PUNTI DI $S_{2,q}$. – Sia K una C^3 cuspidata di $S_{2,q}$ ($p \neq 2, 3$); indicati con C ed F la cuspide ed il flesso di K e con c, f, g la tangente cuspidale, la tangente inflessionale e la congiungente C ed F, si considerino un punto di P di $S_{2,q}$ appartenente a K distinto da C e da F e le rette r ed s congiungenti P rispettivamente con C ed F. Nel fascio di centro C, restano individuate successivamente le rette r' ed r'' tali che risulti

$$(c\,r\,g\,r') = -1 \quad , \quad (c\,g\,r'\,r'') = -1 \,;$$

e, nel fascio di centro F, le rette s' ed s'' per cui

$$(g\,s\,f\,s') = -1 \quad , \quad (g\,s'\,f\,s'') = -1 .$$

Proveremo che:

X) (7) *Il punto d'intersezione delle rette* r'' *ed* s'' *è il tangenziale di* P.

Basta infatti fissare il riferimento come al n. 1, prendendo P, com'è lecito, quale punto unità, ed effettuare la verifica dell'asserto tenendo presente quanto menzionato alla fine del n. 1.

Ciò premesso, si considerino due fasci di rette di $S_{2,q}$ ($p \neq 2, 3$) di centri rispettivamente R ed S (R $\neq$ S); detta t la retta congiungente R ed S, si fissino due rette del primo fascio $u \neq t$ ed $r_0 \neq t$, u e due rette del secondo

(7) La X è vera anche in un piano lineare sopra un campo di caratteristica $p = 0$.

fascio $v \neq t$ ed $s_0 \neq t, v$. Siano inoltre $r_i, \bar{r}_i$ ed $s_i, \bar{s}_i$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$ ($k = \mathrm{gss}(p, -2)$), le rette rispettivamente del primo e del secondo fascio determinate per ricorrenza dalle relazioni

$$(5.1) \qquad (u\, r_{i-1}\, t\, \bar{r}_i) = -1 \quad , \quad (u\, t\, \bar{r}_i\, r_i) = -1 ;$$

$$(5.2) \qquad (t\, s_{i-1}\, v\, \bar{s}_i) = -1 \quad , \quad (t\, \bar{s}_i\, v\, s_i) = -1 .$$

Dalla X segue subito che:

XI) *I punti* $P_j = s_j \cap r_j$, $j = 0, 1, \cdots, k-1$ ($k = \mathrm{gss}(p, -2)$), *appartengono ad una cubica* K *avente* R, S, u, v *rispettivamente come cuspide, flesso, tangente cuspidale e tangente inflessionale e costituiscono su essa un insieme ciclico di punti*, K_1.

Osservando che la retta proiettante dalla cuspide di una cubica il flesso di questa è la coniugata armonica della tangente cuspidale rispetto alla coppia di rette proiettanti dalla cuspide una qualsiasi coppia di punti allineati col flesso, dalle II, III e dalla seconda delle (5.1) si deduce che:

XII) *I punti* $Q_0 = s_0 \cap \bar{r}_0$ (*essendo* $\bar{r}_0$ *la quarta armonica dopo* $u\, t\, r_0$) *e* $Q_i = s_i \cap \bar{r}_i$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$, *appartengono a* K (cfr. XI) *e costituiscono su essa un insieme ciclico di punti*, K_2, *distinto da* K_1 *se* k *è dispari e coincidente con* K_1 *se* k *è pari.*

Più precisamente, se k è pari risulta:

$$Q_m = P_{k/2+m} \quad , \quad Q_{k/2+m} = P_m \quad , \quad m = 0, 1, \cdots, k/2 - 1,$$

e quindi

$$s_m = s_{k/2+m} \quad , \quad \bar{r}_m = r_{k/2+m} \quad , \quad \bar{r}_{k/2+m} = r_m .$$

In particolare, se è $q = p$, $k = p - 1$ oppure $q = p$, $k = (p-1)/2$, $(p-1)/2$ dispari, i punti R, S, P_j nel primo caso, od i punti R, S, P_j, Q_j nel secondo, sono, in numero di $q + 1$, e costituiscono quindi una cubica cuspidata di $S_{2,q}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] E. BERTINI, *Complementi di geometria proiettiva*, Zanichelli (1927).

[2] A. COSSU, *Su alcune proprietà dei* {*k*, *n*}*-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito*, « Rend. di Mat. », (3–4) vol. 20, pp. 263–269 (1961).

[3] L. LOMBARDO RADICE, *Sul problema dei k-archi completi di* $S_{2,q}$ ($q = p^t$, *p primo dispari*), « Boll. U.M.I. », ser. III, pp. 178–181 (1956).

[4] B. SEGRE, *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » [8], *17*, pp. 141–142 (1954).

[5] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, « Canad. J. Math. », 7, pp. 414–416 (1955).

[6] B. SEGRE, *Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti*, « Ann. Mat. pura appl. », [4] *39*, pp. 357–379 (1955).

[7] B. SEGRE, *Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica due*, « Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul », ser. A, *21*, pp. 97–123 (1956).

[8] B. SEGRE, *Sui k-archi nei piani finiti di caratteristica 2*, « Revue de Math. Pures et appl. », *2*, pp. 289–300 (1957).

[9] B. SEGRE, *Le geometrie di Galois*, « Ann. di Mat. » [4], *48*, pp. 1–97 (1959).

[10] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Ed. Cremonese (1961).