Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Tallini

Intorno alle forme di uno spazio di Galois ed agli spazi subordinati giacenti su esse

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.6, p. 421–428.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_6_421_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Geometria. — *Intorno alle forme di uno spazio di Galois ed agli spazi subordinati giacenti su esse* (*). Nota di GIUSEPPE TALLINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

Sia $S_{r,q}$ uno spazio di Galois, cioè uno spazio lineare di dimensione r, costruito su un campo di Galois, γ_q, d'ordine q (con $q = p^h$, p caratteristica di γ_q) (1). Penseremo $S_{r,q}$ immerso nello spazio r–dimensionale $S_{r,\Gamma}$, costruito sulla chiusura algebrica Γ di γ_q. Nel seguito porremo per semplicità di scrittura:

$$q_k = q^k + q^{k-1} + \cdots + q + 1 \qquad (k \text{ intero non negativo}).$$

Denoteremo poi con Φ la classe di tutte le forme di $S_{r,q}$, e con Φ', Φ'', Φ_t $(t = 0, 1, \cdots, r-1)$ le sottoclassi di Φ costituite rispettivamente dalle forme irriducibili in Γ, dalle forme non singolari in γ_q, dalle forme i cui punti singolari in γ_q siano congiunti da un $S_{t'}$, con $t' \leq t$.

Essendo finito, ed uguale a $\prod_{i=0}^{l} (q_{r-i}/q_{l-i})$, [3] p. 174, il numero degli S_l di $S_{r,q}$, si pone in modo naturale il seguente

PROBLEMA. – *Fissato comunque in* $S_{r,q}$ *una sottoclasse* $\mathfrak{F}$ *di* Φ *e l'intero* l, *con* $0 \leq l \leq r-1$, *determinare il massimo numero di* S_l *in* γ_q *che può contenere una forma di* $\mathfrak{F}$, *e studiare quelle forme di* $\mathfrak{F}$ *possedenti tale numero di* S_l *in* γ_q (2).

In un precedente lavoro [6], abbiamo esaminati i casi $l = 0$, $F = \Phi$, Φ' del suddetto Problema. Nella presente Nota ci occuperemo dei casi

$$l \geq 1 \, , \, \mathfrak{F} = \Phi \quad ; \quad l = 1 \, , \, \mathfrak{F} = \Phi'' \quad ; \quad l = 1 \, , \, \mathfrak{F} = \Phi_t \quad \text{con} \quad t \equiv r \bmod 2.$$

Esporremo ora i risultati ottenuti.

Indicheremo con F_l^n $(l \geq 0)$, una forma d'ordine n di $S_{r,q}$, contenente il massimo numero di S_l in γ_q. In relazione ad esse nel n. 2 proveremo che:

I) *Ogni* F_l^n $(l \geq 0)$ *contiene tutti i* $\prod_{i=0}^{l} (q_{r-i}/q_{l-i})$ S_l *di* $S_{r,q}$, *ed ha ordine* $n \geq q_{l+1}$. *Ogni punto di* $S_{r,q}$ *è di molteplicità almeno* q_l *per la* F_l^n. *Fissato comunque* $n \geq q_{l+1}$, *esistono forme* F_l^n.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca del C.N.R. n. 17.

(**) Nella seduta del 15 dicembre 1962.

(1) Per le prime nozioni sui campi e gli spazi di Galois, e maggiori dettagli sull'argomento, cfr. [3], [4] §§ 12, 17.

(2) Il Problema ha riscontro in uno classico, posto da W. Fr. MEYER in [1], consistente nella determinazione del massimo numero, m_n, di rette posseduto da una superficie non singolare d'ordine n (≥ 3) di un S_3 complesso. Una risposta a tale questione trovasi in [2], ove è dimostrato, tra l'altro che è $m_4 = 64$ e $m_n \leq (n-2)(11n-6)$. Osserviamo che tali risultati non si trasportano al caso di un campo di caratteristica diversa da zero: esistono infatti superficie non singolari del quarto ordine di un S_3 costruito sulla chiusura algebrica di γ_3, che contengono 112 rette (ciò si deduce dalla ultima prop. del n. 8 di [6], qualora ivi si faccia $m = 1$, $q = 3$).

Si pone la questione d'indagare se tra le forme F_l^n ve ne siano di irriducibili in Γ. Al riguardo relativamente alle forme $F_1^{q_2}$ d'ordine minimo, abbiamo dimostrato (n. 2) che:

II) *Ogni* $F_1^{q_2}$ *di un* $S_{3,q}$ *è spezzata nei* q_2 *piani di una stella.*

III) *Ogni* $F_1^{q_2}$ *di un* $S_{4,q}$ *contiene come componente un iperpiano in* γ_q.

IV) *In un* $S_{r,q}$, *con* $r \geq 5$, *esistono forme* $F_1^{q_2}$ *irriducibili.*

Nel n. 3 proveremo il seguente teorema che dà una risposta al Problema posto, nel caso $l = 1$, $\mathfrak{F} = \Phi''$, r dispari.

TEOREMA I. – *In un* $S_{2m+1,q}$ $(m \geq 1)$ *il massimo numero di rette che una forma, f, di* Φ'' *può ammettere è* $M = q_{2m+1}\, q_{2m-1}/q_1$; *tale massimo essendo raggiunto dalla forma non singolare*

$$(1) \qquad (x_0^q x_1 - x_0 x_1^q) + (x_2^q x_3 - x_2 x_3^q) + \cdots + (x_{2m}^q x_{2m+1} - x_{2m} x_{2m+1}^q) = 0 .$$

Se una f di Φ'' *possiede* M *rette, esse costituiscono in* $S_{2m+1,q}$ *un complesso lineare non speciale; inoltre, se l'ordine di f è minore di* $2q$, *la f coincide, a meno di una trasformazione omografica in* γ_q, *con la* (1), *oppure si spezza in una tale forma ed in un'altra priva di punti in* γ_q [(3)].

Nel n. 4 daremo una risposta al Problema posto, nel caso $l = 1$, $\mathfrak{F} = \Phi_t$, con $t \equiv r \bmod 2$, dimostrando il seguente:

TEOREMA II. – *Il massimo numero di rette che una forma, f, di* Φ_t, *con* $t \equiv r$ *mod* 2, *può ammettere è* $M_t = (q_r q_{r-2} + q^{r-1} q_t)/q_1$; *tale massimo essendo raggiunto dalla forma:*

$$(2) \qquad (x_0^q x_1 - x_0 x_1^q) + (x_2^q x_3 - x_2 x_3^q) + \cdots + (x_{2m}^q x_{2m+1} - x_{2m} x_{2m+1}^q) = 0 ,$$

$$m = (r - t - 2)/2 ,$$

che risulta un cono con vertice l'S_t *di equazione* $x_0 = x_1 = \cdots = x_{2m+1} = 0$. *Se una f di* Φ_t *possiede* M_t *rette, queste costituiscono in* $S_{r,q}$ *un complesso lineare speciale avente come spazio singolare un* S_t; *inoltre se l'ordine di f è minore di* $2q$, *la f coincide, a meno di una trasformazione omografica, con la* (2), *oppure si spezza in una tale forma ed in un'altra i cui punti in* γ_q *sono tutti contenuti nell'*S_t.

2. Fissato in $S_{r,q}$ un S_{r-l-2} $(l \geq 0)$, la forma spezzata nei q_{l+1} iperpiani in γ_q per l'S_{r-l-2}, contiene evidentemente tutti gli S_l di $S_{r,q}$. Ne segue che una forma F_l^n possiede tutti gli S_l di $S_{r,q}$.

Proviamo ora che una F_l^n ha ordine $n \geq q_{l+1}$. L'affermazione essendo evidente per $r = l + 1$, può provarsi per induzione rispetto ad r, supponendo $r > l + 1$. Due casi sono possibili, o la F_l^n contiene come componenti tutti i q_r iperpiani di $S_{r,q}$, ed allora è $n \geq q_r > q_{l+1}$; oppure esiste un S_{r-1} che non sia componente di F_l^n. In tal caso $S_{r-1} \cap F_l^n$ è una forma $F_l'^n$ di S_{r-1}, quindi per l'induzione ammessa è $n \geq q_{l+1}$; onde in ogni caso l'asserto.

(3) Questo teorema, nel caso $m = 1$, è stato annunciato nella Nota Lincea [5] a p. 712.

Sia P un punto di $S_{r,q}$ e quindi di F_l^n. Il cono tangente in P alla F_l^n, dovendo contenere tutti gli S_l di $S_{r,q}$ per P, è una forma che possiede tutti gli S_{l-1} di $S_{r,q}$. Per quanto precede allora il suo ordine è $\geq q_l$. Dunque P è di molteplicità almeno q_l per la F_l^n.

Si consideri in $S_{r,q}$ l'S_{r-l-2} di equazioni $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_{l+2}} = 0$ $(i_1, < i_2 < \cdots < i_{l+2})$. L'ipersuperficie $F_l^{q_{l+1}}$ spezzata nei q_{l+1} iperpiani in γ_q per l'S_{r-l-2}, ha equazione:

$$(3) \qquad \varphi_{i_1 i_2 \cdots i_{l+2}} \equiv x_{i_{l+2}} \prod_{s=1}^{l+1} \prod_{\lambda_{s+1}^{(s)}, \ldots, \lambda_{l+2}^{(s)} \in \gamma_q} (x_{i_s} + \lambda_{s+1}^{(s)} x_{i_{s+1}} + \cdots + \lambda_{l+2}^{(s)} x_{i_{l+2}}) = 0 .$$

Dunque le ipersuperficie

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_{l+2}} A_{i_1 i_2 \cdots i_{l+2}} \varphi_{i_1 i_2 \cdots i_{l+2}} = 0 ,$$

ove le $A_{i_1 i_2 \cdots i_{l+2}}$ sono forme in γ_q di grado $n - q_{l+1}$, dànno esempi di forme F_l^n, qualsiasi sia $n \geq q_{l+1}$. La I del n. 1, resta così completamente provata.

Dimostriamo ora la II del n. 1.

Sia P un punto di $S_{3,q}$. Se tutti i q_2 piani in γ_q per P sono componenti della $F_1^{q_2} \equiv F$, la proposizione è vera; supponiamo dunque che esista un piano, α, in γ_q per P non componente della F. L'intersezione di F con α è costituita dalle q_2 rette in γ_q di α. Onde P, per tale sezione, è un punto di molteplicità esattamente q_1 e quindi di molteplicità $s \leq q_1$, per la F. Ma è $s \geq q_1$ (I n. 1), ne segue $s = q_1$.

Il cono tangente in P alla F, ha ordine q_1 e invade l'$S_{r,q}$. Dunque ([6], prima prop. n. 6, p. 462) è spezzato nei q_1 piani in γ_q di un fascio con asse una retta a per P. Siano π uno qualsiasi di tali piani, r una arbitraria retta, a coefficienti in Γ, di π per P. Se r è a coefficienti in γ_q, essa appartiene ad F. Se r è a coefficienti in $\Gamma - \gamma_q$, tutti i suoi punti, tranne P, hanno coordinate in $\Gamma - \gamma_q$. Allora le q^2 rette in γ_q di π, non passanti per P, incontrano la r in q^2 punti distinti. Poiché tali rette appartengono ad F, la r ha in comune con la F q^2 punti distinti diversi da P. Ma r ha in P con la F molteplicità d'intersezione almeno $q + 2$ (in quanto r appartiene al cono tangente in P alla F); dunque r è contenuta per intero nella $F \equiv F_1^{q_2}$. Ne segue che π appartiene a F. Onde ognuno dei $q + 1$ piani in γ_q del fascio di asse a è componente della F e non esistono altri piani per P componenti di F.

Sia P_1 un punto di $S_{3,q}$ non appartenente alla retta a. Non può accadere che ognuno dei q_2 piani in γ_q per P_1 sia componente di F: altrimenti la F consterebbe di tali unici piani e ciò è escluso appartenendo alla F anche i q_1 piani in γ_q del fascio di asse a. Ripetendo allora per P_1 le argomentazioni svolte per P, si ha che esistono esattamente q_1 piani in γ_q per P_1, formanti fascio di asse una retta a_1, che risultano componenti di F. Tra essi vi è il piano $a \cup P_1$, quindi le rette a ed a_1 sono complanari. Sia P_2 il loro punto d'incontro. Per P_2 passano almeno $2q + 1$ piani in γ_q componenti di F.

Ma allora tutti i q_2 piani in γ_q per P_2 appartengono ad F (altrimenti, ripetendo per P_2 le argomentazioni svolte per P, si avrebbe che per P_2 dovrebbero passare soltanto q_1 piani componenti di F), onde l'asserto.

Proveremo ora la III del n. 1.

Supponiamo per assurdo che in $S_{4,q}$ esista una $F_1^{q_2} \equiv F$ che non contenga nessun S_3 in γ_q come componente. Ogni S_3 in γ_q sega allora F in una forma spezzata nei q_2 piani in γ_q di una stella (II n. 1). Sia Q un qualsiasi punto di $S_{4,q}$; fissato un S_3 in γ_q non passante per Q, sia τ uno dei piani di $S_3 \cap F$. L'$S'_3 = Q \cup \tau$ sega F nei q_2 piani in γ_q di una stella con centro, C, necessariamente su τ (in quanto τ appartiene ad F e cioè a tale stella); onde è $Q \neq C$. Perciò Q risulta un punto di molteplicità esattamente q_1 per $S'_3 \cap F$ e quindi di molteplicità $s \leq q_1$ per la F. Ma è $s \geq q_1$ (I n. 1), onde $s = q_1$. Dunque ogni punto di $S_{4,q}$ è di molteplicità esattamente q_1 per F.

Sia π un qualsiasi S_3 di $S_{4,q}$, esso sega la F nei q_2 piani in γ_q di una stella con centro in un punto P. Il cono tangente, φ, in P alla F, ha ordine q_1, invade l'$S_{4,q}$ e contiene tutti i piani in γ_q della stella di π con centro P. Da ciò e dalla prima proposizione del n. 6 di [6] a p. 462, segue che φ è spezzato nei q_1 iperpiani in γ_q – tra i quali vi è π – di un fascio, $\mathfrak{F}$, con asse un piano α per P. Inoltre ciascun piano in γ_q per P appartenente ad uno qualsiasi dei suddetti q_1 iperpiani è contenuto in F, (bastando al riguardo ripetere l'argomentazione fatta nel settimo capoverso di questo numero).

Sia ora π_1 un S_3 in γ_q per P non contenente α. I q_1 iperpiani in γ_q per α intersecano π_1 nei q_1 piani in γ_q di π_1, per la retta $r = \pi_1 \cap \alpha$. Poiché $P \in r$, tali q_1 piani appartengono ad F. Dunque π_1 interseca F nei q_2 piani in γ_q di una stella con centro un punto P_1 di r. Risulta poi $P_1 \neq P$, in quanto gli unici piani in γ_q di π_1 per P, contenuti in F, sono evidentemente i q_1 piani su menzionati. Ripetendo per P_1 le argomentazioni svolte per P, si deduce che il cono tangente, φ_1, in P_1 a F si spezza nei q_1 iperpiani in γ_q – tra i quali vi è π_1 – di un fascio, $\mathfrak{F}_1$, di asse un piano α_1 per P_1. Ogni tale iperpiano interseca F nei q_2 piani in γ_q della stella di centro P_1. Il piano α è contenuto in F e passa per P_1, dunque appartiene a φ_1 e quindi ad uno dei suddetti q_1 iperpiani di $\mathfrak{F}_1$, sia S'_3. L'S'_3, in quanto iperpiano in γ_q di $\mathfrak{F}_1$, interseca F nei q_2 piani della stella di centro P_1; in quanto iperpiano in γ_q del fascio $\mathfrak{F}$, interseca F nei q_2 piani della stella di centro P. Ma è $P \neq P_1$, dunque l'S'_3 ha in comune con la $F \equiv F_1^{q_2}$ almeno $2q^2 + q + 1$ piani distinti e ciò è assurdo, onde l'asserto.

Dimostreremo la IV del n. 1, provando che:

In $S_{r,q}$, con $r \geq 5$, la forma $F_1^{q_2}$ di equazione:

$$\varphi_{012} + \varphi_{345} + \cdots + \varphi_{3m\ 3m+1\ 3m+2} = 0\,, \qquad (3m + 2 \leq r\,, m \geq 1)\,, \tag{4}$$

ove le $\varphi_{i_1 i_2 i_3}$ sono date dalle (3) per $l = 1$, è irriducibile in Γ.

Dalle (3) per $l = 0\,,1$, si ha facilmente che:

$$\varphi_{i_1 i_2} = x_{i_1}^q x_{i_2} - x_{i_1} x_{i_2}^q \quad , \quad \varphi_{i_1 i_2 i_3} = x_{i_1} \varphi_{i_2 i_3}^q + x_{i_2} \varphi_{i_3 i_1}^q + x_{i_3} \varphi_{i_1 i_2}^q\,. \tag{5}$$

Dalle (3) si ha che $\varphi_{i_1 i_2}$, $\varphi_{i_1 i_2 i_3}$ sono alternanti rispetto agli indici e che

$$(6) \qquad \partial_i \varphi_{i_1 i_2 i_3} = 0\,, \quad \text{se} \quad i \neq i_1\,, i_2\,, i_3 \quad ; \quad \partial_{i_1} \varphi_{i_1 i_2 i_3} = (\varphi_{i_2 i_3})^q,$$

$\partial_h \varphi_{i_1 i_2 i_3}$ denotando la derivata parziale di $\varphi_{i_1 i_2 i_3}$ rispetto ad h.

Se è $r > 3m + 2$ la (4) rappresenta un cono proiettante dall'S_{r-3m-3} di equazioni $x_0 = \cdots = x_{3m+2} = 0$, l'ipersuperficie dell'$S_{3m+2}$ di equazioni $x_{3m+3} = \cdots = x_r = 0$, rappresentata dalla (4). Basta dunque dimostrare che in un $S_{3m+2,q}(x_0, \cdots, x_{3m+1})$ la (4) è una ipersuperficie, F, irriducibile.

I punti singolari in Γ della F si ottengono, tutti e soli, risolvendo il sistema che si ottiene annullando le derivate parziali della (4), cioè – in forza delle (6) e dell'alternanza delle $\varphi_{i_1 i_2 i_3}$ – il sistema:

$$(7) \qquad \varphi_{3s+1\,3s+2} = 0 \quad , \quad \varphi_{3s\,3s+2} = 0 \quad , \quad \varphi_{3s\,3s+1} = 0 \qquad (s = 0\,, 1\,, \cdots, m).$$

Se un punto $P(y_{3s}, y_{3s+1}, y_{3s+2}; s = 0, 1, \cdots, m)$ in Γ soddisfa le (7), in forza della prima delle (5), dovrà aversi, per ogni fissato $s\ (= 0, 1, \cdots, m)$, $y_{3s} = \rho_s z_{3s}, y_{3s+1} = \rho_s z_{3s+1}, y_{3s+2} = \rho_s z_{3s+2}$, in cui $z_{3s}, z_{3s+1}, z_{3s+2}$ sono elementi di γ_q non tutti nulli ed è $\rho_s \in \Gamma$. Quindi P appartiene allo spazio S_m, a coefficienti in γ_q, individuato dagli $m + 1$ punti $A_s(0, 0, 0; \cdots; 0, 0, 0; z_{3s}, z_{3s+1}, z_{3s+2}; 0, 0, 0; \cdots; 0, 0, 0)$, $s = 0, 1, \cdots, m$.

Viceversa ogni punto di un tale spazio soddisfa evidentemente le (7). Dunque i punti in Γ singolari per la F sono tutti e soli quelli dei $(q_2)^{m+1}\, S_m$ ognuno dei quali si ottiene congiungendo $m + 1$ punti in γ_q, scelti il primo nel piano fondamentale delle variabili x_0, x_1, x_2, il secondo in quello delle variabili $x_3, x_4, x_5, \cdots$, l'ultimo in quello delle variabili $x_{3m}, x_{3m+1}, x_{3m+2}$. Ne segue, la varietà singolare della F essendo una V_m, che la F è irriducibile.

3. Premettiamo il seguente lemma, che, oltre ad avere interesse a sé, in quanto dà una caratterizzazione grafica dei complessi lineari di rette non speciali di un $S_{2m+1,q}$, ci permette di dimostrare il teor. I del n. 1.

LEMMA I. – *In un* $S_{2m+1,q}\ (m \geq 1)$ *un insieme* K *di* k *rette, con* $k \geq q_{2m+1}\, q_{2m-1}/q_1$, *tale che le rette di* K *per un qualsiasi punto di* $S_{2m+1,q}$ *siano congiunte da un* S_s, *con* $s \leq 2m$, *risulta un complesso lineare non speciale di rette.*

Per ogni punto di $S_{2m+1,q}$ passano evidentemente al più q_{2m-1} rette di K. Essendo i punti di $S_{2m+1,q}$ in numero di q_{2m+1} e di q_1 quelli su una retta, il numero delle rette di K, ciascuna contata q_1 volte, risulta allora al più $q_{2m+1}\, q_{2m-1}$. Onde è $k \leq q_{2m+1}\, q_{2m-1}/q_1$, il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, per ogni punto di $S_{2m+1,q}$ passano esattamente q_{2m-1} rette di K. Supponendosi $k \geq q_{2m+1}\, q_{2m-1}/q_1$, dovrà essere $k = q_{2m+1}\, q_{2m-1}/q_1$ ed inoltre le rette di K per ciascun punto P di $S_{2m+1,q}$ dovranno coincidere con le q_{2m-1} rette in γ_q per P appartenenti ad un determinato iperpiano, π, per P. π sarà chiamato *iperpiano polare* di P rispetto a K. Si ha così in $S_{2m+1,q}$

una corrispondenza punto–iperpiano se si associa ad ogni punto il relativo iperpiano polare rispetto a K.

Proveremo che tale corrispondenza è biunivoca. Sia π un qualsiasi iperpiano di $S_{2m+1,q}$ ed n (≥ 0) il numero dei suoi punti per ciascuno dei quali l'iperpiano polare coincida con π. Per ogni punto di π, distinto dai suddetti n punti, passano esattamente q^{2m-1} rette di K non giacenti in π, mentre per ciascuno degli n punti non passa nessuna retta di K, che non stia in π. Ne segue che le rette di K non giacenti in π sono in numero di $u = q^{2m-1}(q_{2m} - n)$. D'altra parte il numero delle rette di K che giacciono in π è dato da $v = [q_{2m-2}(q_{2m} - n) + nq_{2m-1}]/q_1$; in quanto per ciascuno dei $q_{2m} - n$ punti di π diversi dagli n punti, passano esattamente q_{2m-2} rette di K, mentre per quegli n punti ne passano q_{2m-1}. Dovrà essere $u + v = k = q_{2m+1}\, q_{2m-1}/q_1$. Dalla precedente equazione in n si ricava immediatamente $n = 1$, cioè l'asserita biunivocità della corrispondenza.

Si osservi che se π è l'iperpiano polare di un qualsiasi punto P di $S_{2m+1,q}$ (onde $P \in \pi$), l'iperpiano polare di un punto P′ di π, passa per P (dovendo contenere la retta PP′ che è una retta di K). Ne segue che la corrispondenza in questione è una correlazione [(4)] ([3] n. 135, p. 146), anzi una reciprocità che risulta una polarità nulla (in quanto – come si prova facilmente – ogni correlazione di un S_r per la quale ciascun punto appartenga al proprio iperpiano corrispondente è una polarità nulla). Se ne deduce l'asserto.

In un $S_{2m+1,q}$ alla classe Φ'' (n. 1) appartiene l'ipersuperficie di equazione (1), le cui rette in γ_q coincidono con quella del complesso lineare non speciale di rette, associato alla polarità nulla di equazioni $u_0 = x_1$, $u_1 = -x_0, \cdots, u_{2m} = x_{2m+1}$, $u_{2m+1} = -x_{2m}$ ([6] n. 7, p. 467), tali rette essendo – come si prova facilmente – in numero di $q_{2m+1}\, q_{2m-1}/q_1$. Dunque, detto M il massimo numero di rette che una ipersuperficie di Φ'' può possedere in γ_q, dovrà aversi $M \geq q_{2m+1}\, q_{2m-1}/q_1$; ne segue il teor. I del n. 1, qualora si tenga presente la definizione di Φ'', il Lemma I e la seconda proposizione di [6] n. 6, p. 462.

4. Dimostriamo il seguente:

LEMMA II. – *In un* $S_{r,q}$, *fissato l'intero* t *con* $t \equiv r \bmod 2$ *e* $0 \leq t \leq r-2$, *un insieme* K *di* k *rette, con* $k \geq (q_r\, q_{r-2} + q^{r-1}\, q_t)/q_1$, *e tale che le rette di* K *per un qualsiasi punto di* $S_{r,q}$, *non contenuto in un fissato* S_t, *siano congiunte da un* S_s, *con* $s \leq r-1$, *risulta un complesso lineare speciale di rette, avente come spazio singolare l'*S_t.

Per ogni punto di $S_{r,q}$ che non stia nel fissato S_t, passano al più q_{r-2} rette di K, mentre per un punto di S_t ne passano al più q_{r-1}. Essendo i punti di $S_{r,q}$, in numero di q_r e i punti di una retta in numero di q_1, le rette di K, ciascuna contata q_1 volte, sono al più in numero di $(q_r - q_t)\, q_{r-2} + q_t\, q_{r-1} = q_r\, q_{r-2} + q^{r-1}\, q_t$. Cioè è $k \leq (q_r\, q_{r-2} + q^{r-1}\, q_t)/q_1$, il segno d'uguaglianza

(4) Per le nozioni di correlazioni e reciprocità cfr. [3] n. 145, p. 158.

valendo se, e soltanto se, per ogni punto di $S_{r,q}$, fuori S_t, passano esattamente q_{r-2} rette di K e per ogni punto di S_t ne passano q_{r-1}. Supponendosi $k \geq (q_r q_{r-2} + q^{r-1} q_t)/q_1$, dovrà dunque essere $k = (q_r q_{r-1} + q^{r-1} q_t)/q_1$; inoltre le rette di K per ciascun punto di $S_{r,q}$, fuori S_t, dovranno coincidere con le q_{r-2} rette in γ_q per il punto, appartenenti ad un determinato iperpiano, che denomineremo *iperpiano polare* del punto rispetto a K, mentre le rette di K per ciascun punto di S_t, dovranno coincidere con le q_{r-1} rette di $S_{r,q}$ per tale punto.

Ne segue che ogni retta in γ_q incidente o appartenente all'S_t appartiene a K, e che l'iperpiano polare di un punto P, fuori l'S_t, contiene l'$S_{t+1} = P \cup S_t$.

Dimostriamo che se r è una retta di K, sghemba con l'S_t, ogni retta (in γ_q) dell'$S_{t+2} = r \cup S_t$ appartiene a K. L'iperpiano polare di un fissato punto P di r, dovendo contenere l'$S_{t+1} = P \cup S_t$ ed r ($\in$ K), passa per l'S_{t+2}, quindi ogni retta (in γ_q) per P dell'S_{t+2} appartiene a K. Sia s una qualsiasi retta (in γ_q) di S_{t+2}. Per quanto precede la s è contenuta certamente in K, se essa è incidente o appartiene all'S_t, oppure passa per P. Supponiamo dunque s sghemba con S_t e non passante per P. Il piano $P \cup s$, interseca l'S_t in un punto Q, sia P′ un punto di s distinto dal punto $Q' = PQ \cap s$. La retta $r' = PP'$ è allora sghemba con l'S_t, inoltre (passando per P ed essendo contenuta in S_{t+2}) appartiene a K. Ripetendo quindi per r' e P′ le argomentazioni svolte per r e P, si ha che tutte le rette (in γ_q) per P′ in S_{t+2}, e perciò anche s, appartengono a K.

Da quanto ora provato segue immediatamente che, denotato con K′ la totalità delle rette di K contenute in un S_{r-t-1} sghembo con S_t, le rette di K sono, tutte e sole, quelle incidenti o appartenenti a S_t e quelle che si ottengono proiettando dall'S_t le rette di K′.

Ci rimane dunque da far vedere che K′ è un complesso lineare non speciale di rette. Se P è un qualsiasi punto di S_{r-t-1}, l'iperpiano polare di P rispetto a K, dovendo passare per l'$S_{t+1} = P \cup S_t$, non può contenere l'S_{r-t-1}, e quindi interseca l'S_{r-t-1} in un S_{r-t-2}. Le rette (in γ_q) per P di tale S_{r-t-2} costituiscono la totalità delle rette di K′ per P. Dunque le rette di K′ sono in numero di $k' = q_{r-t-3}\, q_{r-t-1}/q_1$. Anzi, essendo $r \equiv t$ mod 2 e $0 \leq t \leq r-2$, e cioè $r - t - 1 = 2m + 1$ ($0 \leq m \leq [(r-2)/2]$), in forza del Lemma I del n. 3, esse costituiscono le rette in γ_q di un complesso lineare non speciale di rette in $S_{r-t-1} \equiv S_{2m+1}$. Se ne deduce l'asserto.

Si consideri in $S_{r,q}$ la classe Φ_t (n. 1), con $t \equiv r$ mod 2 ($0 \leq t \leq r-2$). A Φ_t appartiene la forma di equazione (2), le cui rette in γ_q coincidono con le $(q_r q_{r-2} + q^{r-1} q_t)/q_1$ rette in γ_q, del complesso lineare speciale, associato alla polarità nulla di equazioni $u_0 = x_1$, $u_1 = -x_0, \cdots, u_{2m} = x_{2m+1}$, $u_{2m+1} = -x_{2m}$ ($m = (r-t-2)/2$), [6] nn. 6, 7. Dunque, denotato con M_t il massimo numero di rette che una forma di Φ_t può ammettere in γ_q, dovrà essere $M_t \geq (q_r q_{r-2} + q^{r-1})/q_1$. Ne segue, qualora si tenga presente la definizione di Φ_t, il Lemma II e la seconda proposizione di [6] n. 6, p. 462, il teorema II del n. 1.

BIBLIOGRAFIA.

[1] W. FR. MEYER, *Flächen vierter und höherer Ordnung*, « Encykl. Math. Wiss. », Bd. 3, Teil 2,2. Hälfte B, 1533–1779, § 54.

[2] B. SEGRE, *The maximum number of lines lying on a quartic surface*, « The quarterly journal of Math. », Oxford Series. Vol. 14, n. 55–6, pp. 86–96 (1943).

[3] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1948).

[4] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry* (Roma, Cremonese, 1961).

[5] G. TALLINI, *Le ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *30*, pp. 706–712 (1961).

[6] G. TALLINI, *Sulle ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che contengono tutti i punti di uno spazio di Galois* $S_{r,q}$. « Rend. Mat. » (3–4), vol. 20, pp. 431–479 (1961).