

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

CARMELO MAMMANA

## Su una notevole classe di corrispondenze cremoniane

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 33 (1962), n.6, p. 412–420.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1962\\_8\\_33\\_6\\_412\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_6_412_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Geometria.** — *Su una notevole classe di corrispondenze cremoniane* <sup>(\*)</sup>. Nota di CARMELO MAMMANA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio B. SEGRE.

1. Siano:

$$(1) \quad (T) \quad x'_i = f_i(x) \quad ; \quad (T^{-1}) \quad x_i = g_i(x') \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

le equazioni di una corrispondenza cremoniana  $T$  fra due spazi proiettivi complessi  $S_r, S'_r$  e della sua inversa  $T^{-1}$ . Indichiamo con  $n$  il grado delle forme  $f_i(x)$  e con  $m$  il grado delle forme  $g_i(x')$ . Se la  $T$  è intera <sup>(1)</sup>, nel sistema

lineare omaloidico  $\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$  c'è un'ipersuperficie spezzata in  $n$  iper-

piani coincidenti e nel sistema lineare omaloidico  $\sum_{i=0}^r \lambda'_i g_i(x') = 0$  c'è un'ipersuperficie spezzata in  $m$  iperpiani coincidenti. Ma può accadere che nel

sistema lineare  $\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$  ci sia un'ipersuperficie spezzata in  $n$  iperpiani

coincidenti nel sistema lineare  $\sum_{i=0}^r \lambda'_i g_i(x') = 0$  ci sia pure un'ipersuperficie spezzata in  $m$  iperpiani coincidenti, *senza che la  $T$  sia intera*. Se ciò accade, diremo che la  $T$  è *pseudointera*.

In questo lavoro studiamo le corrispondenze cremoniane pseudointere fra spazi proiettivi *distinti*. I principali risultati a cui perveniamo sono i seguenti.

Sia  $T$  una corrispondenza cremoniana pseudointera qualsiasi, d'ordine  $n$ , fra due spazi proiettivi distinti  $S_r$  ed  $S'_r$ .

Il numero  $t$  delle componenti irriducibili distinte della jacobiana di  $T$  è compreso fra 2 ed  $n$  (n. 3) e, per ogni  $r \geq 2$  ed ogni  $n \geq 2$ , esistono corrispondenze cremoniane pseudointere d'ordine  $n$  la cui jacobiana ha  $t = 2, 3, \dots, n$  componenti irriducibili distinte (n. 5).

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 28 in collaborazione col Gruppo di ricerca n. 17 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1961-62.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1962.

(1) Una corrispondenza cremoniana  $T$  fra spazi proiettivi distinti  $S_r$  ed  $S'_r$  si dice *intera* quando, con opportune scelte dei riferimenti in  $S_r$  ed in  $S'_r$ , le equazioni di  $T$  e quelle dell'inversa  $T^{-1}$  si possono scrivere nella forma:

$$(T) \quad \begin{cases} x'_0 = x_0^n \\ x'_i = f_i(x) \end{cases} \quad (T^{-1}) \quad \begin{cases} x_0 = x'_0{}^m \\ x_i = g_i(x') \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Se gli spazi  $S_r$  ed  $S'_r$  sono sovrapposti, la  $T$  si dice *intera* quando, con opportuna scelta del riferimento in  $S_r$ , le equazioni di  $T$  e quelle dell'inversa  $T^{-1}$  si possono scrivere nella forma precedente.

Se è  $t \geq 3$ , scegliendo opportunamente i riferimenti in  $S_r$  ed in  $S'_r$ , le equazioni di T si possono scrivere nella forma (n. 4):

$$(T) \begin{cases} x'_0 = x^n_0 \\ x'_1 = x^{p_0}_0 x^{p_1}_1 \varphi^{p_3}_3(x) \cdots \varphi^{p_t}_t(x) \\ x'_i = f_i(x); \end{cases} \quad (T^{-1}) \begin{cases} x_0 = x'^{q'_0}_0 x'^{q'_1}_1 \psi^{q'_3}_3(x') \cdots \psi^{q'_t}_t(x') \\ x_1 = x'^m_1 \\ x_i = g_i(x') \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, r),$$

dove le  $x_0, x_1, \varphi_3(x), \dots, \varphi_t(x)$  danno le componenti irriducibili distinte della jacobiana  $J(x)$  di T, le  $x'_0, x'_1, \psi_3(x'), \dots, \psi_t(x')$  danno le componenti irriducibili distinte della jacobiana  $J'(x')$  di  $T^{-1}$ , e gli esponenti  $p_j, p'_j$  sono tutti positivi.

Inoltre si ha (n. 4):

a) il M.C.D.,  $\rho$ , degli interi  $p_3, p_4, \dots, p_t$  è uguale al M.C.D. degli interi  $p'_3, p'_4, \dots, p'_t$  ed è un divisore di  $p_1 p'_1 - 1$ ;

b) gli interi

$$p'_0(n - p_0) - m p_1 + 1, \quad p_0(m - p'_0) - n p'_1 + 1$$

sono entrambi non negativi e divisibili per  $\rho$ ;

c) se è  $m \geq n$ , allora è  $p'_0 \geq p_1$ , e si ha  $p'_0 = p_1$  allora e solo quando è:

$$m = n, \quad p_0 = p_1 = p'_0 = p'_1 = 1.$$

Se è  $t = 2$ , scegliendo opportunamente i riferimenti in  $S_r$  ed in  $S'_r$ , le equazioni di T si possono scrivere nella forma (n. 6):

$$(T) \begin{cases} x'_0 = x^n_0 \\ x'_1 = x^{n-1}_0 x_1 \\ x'_i = f_i(x); \end{cases} \quad (T^{-1}) \begin{cases} x_0 = x'_0 x'^{m-1}_1 \\ x_1 = x'^m_1 \\ x_i = g_i(x') \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, r).$$

Le componenti irriducibili distinte di  $J(x)$  sono  $x_0, x_1$ ; le componenti irriducibili distinte di  $J'(x')$  sono  $x'_0, x'_1$ . Inoltre, se

$$J(x) = a x^{\tau_0}_0 x^{\tau_1}_1, \quad J'(x') = a' x'^{\tau'_0}_0 x'^{\tau'_1}_1$$

sono le dette jacobiane, si ha (n. 6):

$$\tau_0 = (r+1)(n-1) - \tau_1, \quad \tau'_0 = \tau_1, \quad \tau'_1 = (r+1)(m-1) - \tau_1$$

con

$$1 \leq \tau_1 \leq (r-1)(n-1).$$

Per  $r = 2$  (e  $t = 2$ ) si ha necessariamente  $\tau_1 = n - 1$  e le nostre corrispondenze si determinano tutte completamente (n. 7).

Invece per  $r \geq 3$  (e  $t = 2$ ) l'esponente  $\tau_1$  può assumere tutti i valori da 1 ad  $(r-1)(n-1)$ , e ciò per ogni  $r \geq 3$  e per ogni  $n \geq 2$  (n. 8).

Infine, nel n. 9, osserviamo che ogni corrispondenza cremoniana pseudo-intera, con  $t = 2$ , muta gli iperpiani di un certo fascio di  $S_r$  negli iperpiani di un certo fascio di  $S'_r$ , fra generici iperpiani corrispondenti subordinando

una corrispondenza cremoniana intera. Questa proprietà non caratterizza però le corrispondenze cremoniane pseudointere, con  $t = 2$ , in quanto essa vale anche per corrispondenze cremoniane che non sono pseudointere (n. 9).

2. Consideriamo una corrispondenza cremoniana (1). Nel seguito indicheremo sempre con  $K(x)$  ed  $H(x')$  le forme, di grado  $nm - 1$ , definite dalle identità:

$$g_i(f) = K(x) x_i, \quad f_i(g) = H(x') x'_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r).$$

Indicheremo con  $J(x)$  la jacobiana di  $T$  e con  $J'(x')$  la jacobiana di  $T^{-1}$ ; indicheremo inoltre con  $t$  il numero delle componenti irriducibili distinte di  $J(x)$ . Ricordiamo che <sup>(2)</sup>:

Le forme  $K(x)$  ed  $J(x)$  hanno le stesse componenti irriducibili distinte; le forme  $H(x')$  ed  $J'(x')$  hanno le stesse componenti irriducibili distinte. Le forme  $K(x)$ ,  $J(x)$ ,  $H(x')$ ,  $J'(x')$  hanno lo stesso numero  $t$  di componenti irriducibili distinte.

3. Siano:

$$(T) \quad x'_i = f_i(x) \quad ; \quad (T^{-1}) \quad x_i = g_i(x') \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r)$$

le equazioni di una corrispondenza cremoniana pseudointera fra due spazi proiettivi distinti  $S_r$  ed  $S'_r$ , con le  $f_i(x)$  forme di grado  $n$  e le  $g_i(x')$  forme di grado  $m$ . Allora la  $T$  non è intera, ma, nel sistema lineare  $\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$  c'è un'ipersuperficie spezzata in  $n$  iperpiani coincidenti e, nel sistema lineare  $\sum_{i=0}^r \lambda'_i g_i(x') = 0$ , c'è un'ipersuperficie spezzata in  $m$  iperpiani coincidenti. Pertanto si ha:

$$\sum_{i=0}^r a_i f_i(x) = \left( \sum_{i=0}^r b_i x_i \right)^n, \quad \sum_{i=0}^r a'_i g_i(x') = \left( \sum_{i=0}^r b'_i x'_i \right)^m,$$

con  $a_i, b_i, a'_i, b'_i$  costanti opportune.

Scegliamo il riferimento in  $S_r$  in modo che l'iperpiano  $\sum_{i=0}^r b_i x_i = 0$  sia l'iperpiano  $x_0 = 0$ , ed il riferimento in  $S'_r$  in modo che l'iperpiano  $\sum_{i=0}^r a'_i x'_i = 0$  sia l'iperpiano  $x'_0 = 0$ . Dopo ciò, le equazioni di  $T$  risultano del tipo:

$$(T) \quad \begin{cases} x'_0 = x_0^n \\ x'_i = f_i(x) \end{cases} \quad (T^{-1}) \quad \begin{cases} x_0 = g_0(x') \\ x_i = g_i(x') \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

(2) C. MAMMANA, *Su certe ipersuperficie, analoghe alle jacobiane, legate ad una corrispondenza cremoniana*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. XXVII, fasc. 6 (1959); O. H. KELLER, *Ganze Cremona Transformationen*, « Monatsch. F. Math. u. Phys. », vol. 47 (1939); B. SEGRE, *Corrispondenze birazionali e topologia di varietà algebriche*, « Annali di Matematica », ser. IV, tomo XLIII (1957).

e si ha (n. 2):

$$H(x') x_0 = g_0^n(x') \quad , \quad \sum_{i=0}^r a_i g_i(x') = \left( \sum_{i=0}^r b_i x_i \right)^m$$

con  $a_i, b_i$  costanti opportune.

L'iperpiano  $\sum_{i=0}^r a_i x_i = 0$  non può coincidere con  $x_0 = 0$ , altrimenti sarebbe  $H(x') x_0 = g_0^n(x')$ ,  $a_0 g_0(x') = \left( \sum_{i=0}^r b_i x_i \right)^m$  e quindi  $a_0 g_0(x') = b_0^m x_0^m$  e la T sarebbe intera.

L'iperpiano  $\sum_{i=0}^r b_i x_i = 0$  non può coincidere con  $x'_0 = 0$ , altrimenti sarebbe  $\sum_{i=0}^r a_i g_i(x') = b_0^m x_0^m$  e quindi  $\sum_{i=0}^r a_i g_i(f) = b_0^m x_0^{nm}$ , cioè  $K(x) \sum_{i=0}^r a_i x_i = b_0^m x_0^{nm}$ , e quindi l'iperpiano  $\sum_{i=0}^r a_i x_i = 0$  coinciderebbe con  $x_0 = 0$ .

Per quanto sopra, possiamo scegliere  $\sum_{i=0}^r a_i x_i = 0$  e  $\sum_{i=0}^r b_i x'_i = 0$  rispettivamente quali iperpiani  $x_i = 0$  e  $x'_i = 0$  (lasciando inalterati gli iperpiani  $x_0 = 0$  e  $x'_0 = 0$ ).

Con tale scelta dei riferimenti in  $S_r$  ed in  $S'_r$ , le equazioni della corrispondenza T risultano del tipo:

$$(T) \begin{cases} x_0 = x_0^n \\ x'_i = f_i(x) \\ x'_i = f_i(x); \end{cases} \quad (T^{-1}) \begin{cases} x_0 = g_0(x') \\ x_i = x_i'^m \\ x_i = g_i(x') \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, r).$$

Dalle identità  $g_i(f) = K(x) x_i$  ed  $f_0(g) = H(x') x'_0$  segue:

$$(2) \quad f_i^m(x) = K(x) x_i \quad , \quad g_0^n(x') = H(x') x'_0,$$

e quindi  $f_i(x)$  è divisibile per  $x_i$  e  $g_0(x')$  è divisibile per  $x'_0$ . Poniamo:

$$(3) \quad f_i(x) = x_i^{\rho_i} \bar{f}_i(x) \quad , \quad g_0(x') = x_0'^{\rho_0} \bar{g}_0(x'),$$

con  $\rho_i \geq 1$ ,  $\rho'_i \geq 1$ ,  $\bar{f}_i(x)$  non divisibile per  $x_i$  e  $\bar{g}_0(x')$  non divisibile per  $x'_0$ .

Dalle (2) e (3) segue:

$$(4) \quad K(x) = x_i^{m\rho_i-1} \bar{f}_i^m(x) \quad , \quad H(x') = x_0'^{n\rho_0-1} \bar{g}_0^n(x').$$

E poiché:  $f_i(g) = H(x') x'_i$ ,  $g_0(f) = K(x) x_0$ , per le (3) e (4) si ha:

$$x_i^{m\rho_i-1} \bar{f}_i(g) = x_0'^{n\rho_0-1} \bar{g}_0^n(x') \quad , \quad x_0'^{n\rho_0-1} \bar{g}_0(f) = x_i^{m\rho_i-1} \bar{f}_i^m(x);$$

sicché essendo  $m\rho_i \geq 2$  ed  $n\rho'_i \geq 2$ , segue che  $\bar{g}_0(x')$  è divisibile per  $x'_i$  ed  $\bar{f}_i(x)$  è divisibile per  $x_0$ . Possiamo quindi porre:

$$(5) \quad f_i(x) = x_0^{\rho_0} x_i^{\rho_i} F_i(x) \quad , \quad g_0(x') = x_0'^{\rho'_0} x_i'^{\rho'_i} G_0(x'),$$

dove  $\rho_0, \rho_i, \rho'_0, \rho'_i$  denotano interi positivi, la forma  $F_i(x)$  non è divisibile né per  $x_0$  né per  $x_i$ , e la forma  $G_0(x')$  non è divisibile né per  $x'_0$  né per  $x'_i$ .

Le forme  $K(x)$  ed  $H(x')$ , per le (2), si esprimono con le:

$$(6) \quad K(x) = x_o^{m_{q_0}} x_i^{m_{q_i}-1} F_i^m(x) \quad , \quad H(x') = x_o'^{n_{q_0}-1} x_i'^{n_{q_i}} G_o^n(x').$$

Dalle (5), (6) segue (n. 2):

a) *il numero  $t$  delle componenti irriducibili distinte della jacobiana  $J(x)$  di  $T$  è compreso fra 2 ed  $n$  ( $2 \leq t \leq n$ );*

b) *le forme  $F_i(x)$  e  $G_o(x')$  hanno lo stesso numero,  $t-2$ , di fattori irriducibili distinti.*

4. Sia  $t \geq 3$ . In quest'ipotesi, le forme  $F_i(x)$  e  $G_o(x')$  sono entrambe di gradi positivi; decomponiamole nei loro fattori primi:

$$F_i(x) = \varphi_3^{q_3}(x) \varphi_4^{q_4}(x) \cdots \varphi_t^{q_t}(x) \quad , \quad G_o(x') = \psi_3^{q'_3}(x') \psi_4^{q'_4}(x') \cdots \psi_t^{q'_t}(x').$$

Sia  $\rho$  il M.C.D. degli interi  $\rho_3, \rho_4, \dots, \rho_t$  e sia  $\rho'$  il M.C.D. degli interi  $\rho'_3, \rho'_4, \rho'_t$ .

Ponendo:

$$\varphi(x) = \varphi_3^{\sigma_3}(x) \varphi_4^{\sigma_4}(x) \cdots \varphi_t^{\sigma_t}(x) \quad , \quad \psi(x') = \psi_3^{\sigma'_3}(x') \psi_4^{\sigma'_4}(x') \cdots \psi_t^{\sigma'_t}(x'),$$

con  $\sigma_i = \rho_i : \rho$ ,  $\sigma'_i = \rho'_i : \rho'$  ( $i = 3, 4, \dots, t$ ), si ha  $F_i(x) = \varphi^{\rho}(x)$ ,  $G_o(x') = \psi^{\rho'}(x')$  e le (6) diventano:

$$K(x) = x_o^{m_{q_0}} x_i^{m_{q_i}-1} \varphi^{m_{q_i}}(x) \quad , \quad H(x') = x_o'^{n_{q_0}-1} x_i'^{n_{q_i}} \psi^{n_{q_i}}(x').$$

Per le  $f_i(g) = H(x') x_i'$ ,  $g_o(f) = K(x) x_o$ , segue dunque:

$$\varphi^{\rho}(g) = x_i'^{q'_i(n_{q_0}-m_{q_i}+1)} x_o'^{q'_i(n_{q_0}-1)} \psi^{q'_i(n_{q_0})}(x')$$

$$\psi^{\rho'}(f) = x_o^{q_o(m_{q_0}-n_{q_0}+1)} x_i^{q_o(m_{q_0}-1)} \varphi^{q_o(m_{q_0})}(x),$$

onde si hanno le relazioni:

$$\rho'_o(n - \rho_o) - m_{\rho_i} + 1 = a\rho \quad , \quad \rho_o(m - \rho'_o) - n_{\rho_i} + 1 = a'\rho'$$

$$\rho'_i(n - \rho_o) - 1 = b\rho \quad , \quad \rho_i(m - \rho'_o) - 1 = b'\rho'$$

$$\rho'(n - \rho_o) = c\rho \quad , \quad \rho(m - \rho'_o) = c'\rho'$$

con  $a, a'$  interi non negativi, in quanto  $\psi(x')$  non è divisibile per  $x_i'$  e  $\varphi(x)$  non è divisibile per  $x_o$ , mentre  $b, c, b', c'$  sono interi positivi perché, essendo  $t \geq 3$ , si ha  $n - \rho_o \geq 2$  ed  $m - \rho'_o \geq 2$ .

Dalle relazioni scritte sopra segue  $\rho_i c' - \rho b' = \rho : \rho'$ ,  $\rho'_i c - \rho' b = \rho' : \rho$ , sicché  $\rho$  è divisibile per  $\rho'$  e  $\rho'$  è divisibile per  $\rho$ . Pertanto si ha  $\rho = \rho'$  e quindi:

$$(7) \quad \rho'_o(n - \rho_o) - m_{\rho_i} + 1 = a\rho \quad , \quad \rho_o(m - \rho'_o) - n_{\rho_i} + 1 = a'\rho,$$

con  $a, a'$  interi non negativi.

Indicando con  $\mu$  il grado di  $\varphi(x)$  e con  $\mu'$  il grado di  $\psi(x')$ , si ha  $m = \mu' \rho + \rho'_o + \rho'_i$ ,  $n = \mu \rho + \rho_o + \rho_i$ , e le (7) diventano:

$$(\mu \rho'_o - \mu' \rho_i) \rho - (\rho_i \rho'_i - 1) = a\rho \quad , \quad (\mu' \rho_o - \mu \rho'_i) \rho - (\rho_i \rho'_i - 1) = a'\rho,$$

le quali implicano che  $\rho$  è un divisore di  $\rho_i \rho'_i - 1$ .

Proviamo infine che: per  $m \geq n$  è  $\rho'_0 \geq \rho_1$ , e si ha  $\rho'_0 = \rho_1$  allora e solo allora quando è  $m = n$  e  $\rho_0 = \rho_1 = \rho'_0 = \rho'_1 = 1$ .

Infatti, se per  $m \geq n$  fosse  $\rho_1 > \rho'_0$ , per la prima delle (7) sarebbe  $n\rho_1 > n\rho'_0 = m\rho_1 + \rho_0\rho'_0 + a\rho - 1$  e quindi  $(n-m)\rho_1 > \rho_0\rho'_0 + a\rho - 1$ , cioè  $n-m > 0$ , contro l'ipotesi  $m \geq n$ .

Inoltre, se per  $m \geq n$  è  $\rho'_0 = \rho_1$ , allora per la prima delle (7) si ha  $(n-m)\rho_1 = \rho_0\rho_1 - 1 + a\rho$ , e quindi  $n = m$  e  $\rho_0 = \rho_1 = 1$ , da cui per la seconda delle (7) segue  $\rho'_1 = 1$ .

5. Un esempio di corrispondenza cremoniana pseudointera con  $\rho_1 = \rho'_0$  è il seguente:

$$(T) \begin{cases} x'_0 = x''_0 \\ x'_1 = x_0 x_1 F_1(x) \\ x'_i = x_1 x_i F_1(x); \end{cases} \quad (T^{-1}) \begin{cases} x_0 = x'_1 x'_0 G_0(x') \\ x_1 = x'^n_1 \\ x_i = x'_0 x'_i G_0(x') \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, r),$$

con  $F_1(x) = F_1(x_0, x_2, \dots, x_r)$  forma di grado  $n-2$  nelle sole variabili  $x_0, x_2, \dots, x_r$  non divisibile per  $x_0$  e del resto *arbitraria*, e  $G_0(x') = = F_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_r)$ . Per questa corrispondenza si ha:

$$K(x) = x''_0 x''_1{}^{n-1} F_1^n(x), \quad H(x') = x'^n_1 x''_0{}^{n-1} G_0^n(x')$$

$$J(x) = nx''_0 x''_1{}^{r-1} F_1^r(x), \quad J'(x') = nx'^n_1 x''_0{}^{r-1} G_0^r(x').$$

Per l'arbitrarietà della forma  $F_1(x)$ , da questo esempio risulta anche che, per ogni scelta di  $r \geq 2$ ,  $n \geq 2$ ,  $t = 2, 3, \dots, n$ , esistono corrispondenze cremoniane pseudointere d'ordine  $n$  fra spazi di dimensione  $r$  la cui jacobiana ha  $t$  componenti irriducibili distinte.

6. Esaminiamo ora il caso  $t = 2$ . Per  $t = 2$  le ipersuperficie  $f_0(x) = 0$  ed  $f_1(x) = 0$  sono (n. 3)  $x''_0 = 0$  ed  $x''_0 x''_1{}^{n-1} = 0$ , e le ipersuperficie  $g_0(x') = 0$  e  $g_1(x') = 0$  sono (n. 3)  $x''_0 x''_1{}^{n-1} = 0$  e  $x'^m_1 = 0$ ; ne segue<sup>(3)</sup> che è  $\rho_0 = n-1$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho'_0 = m-1$ ,  $\rho'_1 = 1$ , e quindi le equazioni della nostra corrispondenza si possono scrivere nella forma:

$$(8) \quad (T) \begin{cases} x'_0 = x''_0 \\ x'_1 = x''_0{}^{n-1} x_1 \\ x'_i = f_i(x); \end{cases} \quad (T^{-1}) \begin{cases} x_0 = x'^{m-1}_1 x'_0 \\ x_1 = x'^m_1 \\ x_i = g_i(x') \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, r),$$

e si ha:

$$(9) \quad \begin{cases} K(x) = x''_0{}^{m(n-1)} x''_1{}^{m-1} \\ J(x) = a x''_0{}^{\tau_0} x''_1{}^{\tau_1} \end{cases}, \quad \begin{cases} H(x') = x''_0{}^{n-1} x'^{n(m-1)}_1 \\ J'(x') = a' x''_0{}^{\tau'_0} x'^{\tau'_1}_1 \end{cases},$$

con  $a, a'$  costanti non nulle.

(3) C. MAMMANA, *Corrispondenze cremoniane e loro jacobiane*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. XXXIII, fasc. 5 (1962).

Dall'identità <sup>(4)</sup>  $J(g) J'(\kappa') = nmH^{r+1}(\kappa')$  segue  $\tau_0 = \tau_1$  e quindi si ha:

$$\tau_0 = (r+1)(n-1) - \tau_1, \quad \tau'_0 = \tau_1, \quad \tau'_1 = (r+1)(m-1) - \tau_1.$$

Inoltre dalle (8) segue:

$$(10) \quad J(\kappa) = n\kappa_0^{2(n-1)} \frac{\partial(f_2, f_3, \dots, f_r)}{\partial(\kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_r)},$$

e quindi si ha:

$$1 \leq \tau_1 \leq (r-1)(n-1).$$

Esamineremo prima il caso  $r=2$  e poi il caso  $r \geq 3$ .

7. Sia  $r=2$  (e  $t=2$ ). Da  $r=2$  segue  $n=m$ , onde per la (10) e la prima delle (9) si ha:

$$f_2(\kappa) = \frac{a}{n} \kappa_0^{n-1-\tau_1} \kappa_1^{\tau_1} \kappa_2 + \varphi(\kappa_0, \kappa_1),$$

con  $\varphi(\kappa_0, \kappa_1)$  forma di grado  $n$  in  $\kappa_0, \kappa_1$ , eventualmente nulla. Da questa, per l'identità  $f_2(g) = H(\kappa') \kappa'_2$ , segue:

$$(11) \quad \frac{a}{n} \kappa_0^{n-1-\tau_1} \kappa_1^{(n-1)^2+\tau_1} g_2(\kappa') = \kappa_1^{n(n-1)} [\kappa_0^{n-1} \kappa'_2 - \varphi(\kappa'_0, \kappa'_1)],$$

e quindi  $(n-1)^2 + \tau_1 = n(n-1)$ , cioè  $\tau_1 = n-1$ , e per la (11)  $g_2(\kappa') = \frac{n}{a} [\kappa_0^{n-1} \kappa'_2 - \varphi(\kappa'_0, \kappa'_1)]$ .

Pertanto, nel caso  $r=2$  (e  $t=2$ ) si ha  $\tau_1 = n-1$ , e le equazioni della corrispondenza si possono scrivere nella forma:

$$(12) \quad (T) \begin{cases} \kappa'_0 = \kappa_0^n \\ \kappa'_1 = \kappa_0^{n-1} \kappa_1 \\ \kappa'_2 = c \kappa_1^{n-1} \kappa_2 + \varphi(\kappa_0, \kappa_1); \end{cases} \quad (T^{-1}) \begin{cases} \kappa_0 = \kappa_1^{n-1} \kappa'_0 \\ \kappa_1 = \kappa_1^n \\ \kappa_2 = \frac{1}{c} \kappa_0^{n-1} \kappa'_2 - \frac{1}{c} \varphi(\kappa'_0, \kappa'_1) \end{cases}$$

con  $c$  costante non nulla e  $\varphi(\kappa_0, \kappa_1)$  forma di grado  $n$  in  $\kappa_0, \kappa_1$  (eventualmente nulla).

Viceversa, fissate comunque la costante  $c \neq 0$  e la forma  $\varphi(\kappa_0, \kappa_1)$  di grado  $n$  in  $\kappa_0, \kappa_1$  (eventualmente nulla), si verifica subito che le (12) sono le equazioni di una corrispondenza cremoniana fra piani proiettivi la quale è pseudointera ed ha la jacobiana con due sole componenti ( $t=2$ ).

Dalle (12) si deduce facilmente che:

Le reti di curve piane che definiscono corrispondenze cremoniane pseudo-intere con  $t=2$  sono quelle formate dalle curve d'ordine  $n$  con un punto base  $A$   $(n-1)$ -uplo a tangenti coincidenti (fisse), ed  $n-1$  punti base semplici infinitamente vicini su un ramo lineare avente come origine un punto  $B$  distinto da  $A$ .

8. Abbiamo visto (n. 7) che nel caso  $r=2$  (e  $t=2$ ) si ha sempre  $\tau_1 = n-1$ . Questa proprietà non vale per  $r \geq 3$  (e  $t=2$ ). Più precisamente:

(4) C. MAMMANA, loc. cit. in <sup>(2)</sup>.

Per  $r \geq 3$  (e  $t = 2$ ) l'esponente  $\tau_1$  può assumere tutti i valori da 1 ad  $(r-1)(n-1)$ , e ciò per ogni  $r \geq 3$  e per ogni  $n \geq 2$ .

Infatti, consideriamo le corrispondenze cremoniane pseudointere:

$$(T) \begin{cases} x'_0 = x_0^n \\ x'_1 = x_0^{n-1} x_1 \\ x'_2 = x_0^h x_1^k x_2 \\ x'_i = x_0^{h_i} x_1^{k_i} x_i \\ x'_r = x_0^{h_r} x_1^{k_r} x_r + x_2^n; \end{cases} \quad (T^{-1}) \begin{cases} x_0 = x_1^{nk+k_r} x'_0 \\ x_1 = x_1^{nk+k_r+1} \\ x_2 = x_0^{k'} x_1^{(n-1)k+k_r} x'_2 \\ x_i = x_0^{k_i} x_1^{nk+k_r-k_i} x'_i \\ x_r = x_0^{k_r} x_1^{nk} x'_r - x_2^n x_0^{n(k-1)+k_r+1} \end{cases}$$

$(i = 3, 4, \dots, r-1),$

con  $h, h_3, \dots, h_r, k, k_3, \dots, k_r$ , interi non negativi tali che:

$$k \geq 1, \quad h + k = h_3 + k_3 = \dots = h_r + k_r = n - 1.$$

Per queste corrispondenze si ha:

$$J(x) = nx_0^{\tau_0} x_1^{\tau_1}, \quad J'(x') = (nk + k_r + 1) x_0^{\tau'_0} x_1^{\tau'_1}$$

con

$$\tau_0 = 2(n-1) + h + \sum_{i=3}^r h_i, \quad \tau'_0 = k + \sum_{i=3}^r k_i$$

$$\tau_1 = k + \sum_{i=3}^r k_i, \quad \tau'_1 = (r+1)(nk + k_r) - k - \sum_{i=3}^r k_i.$$

Ne segue che si possono scegliere gli interi  $k, k_3, \dots, k_r$  in modo che  $\tau_1$  assuma uno qualunque dei valori da 1 ad  $(r-1)(n-1)$ .

9. Dalle equazioni (8) risulta che  $T$  fa corrispondere all'iperpiano  $x_1 = \lambda x_0$  ( $\lambda \neq 0$ ) l'iperpiano  $x'_1 = \lambda x'_0$ , fra questi due iperpiani subordinando la corrispondenza:

$$(\bar{T}) \begin{cases} x'_0 = x_0^n \\ x'_i = f_i(x_0, \lambda x_0, x_2, \dots, x_r); \end{cases} \quad (\bar{T}^{-1}) \begin{cases} x_0 = \lambda^{m-1} x'_0{}^m \\ x_i = g_i(x'_0, \lambda x'_0, x'_2, \dots, x'_r) \end{cases}$$

$(i = 2, 3, \dots, r),$

la quale, per ogni valore di  $\lambda \neq 0$ , è una corrispondenza cremoniana intera. Pertanto si ha che:

*Ogni corrispondenza cremoniana pseudointera con  $t = 2$  muta gli iperpiani di un certo fascio di  $S_r$  negli iperpiani di un certo fascio di  $S_r$ , e fra generici iperpiani corrispondenti subordina una corrispondenza cremoniana intera.*

Questa proprietà non caratterizza le corrispondenze cremoniane pseudointere con  $t = 2$ , perché essa vale anche per corrispondenze cremoniane che non sono pseudointere.

Per esempio, la proprietà indicata vale anche per le seguenti corrispondenze cremoniane  $T_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ):

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} x'_0 = x_0^n \\ x'_1 = x_0^{n-1} x_1 \\ x'_i = x_0^{h-1} x_1^{n-h} x_i \\ x'_r = x_0^{h-1} x_1^{n-h} x_r + x_1^n; \end{array} \right. \quad (T_h^{-1}) \left\{ \begin{array}{l} x_0 = x_0'^h x_1'^{n-h} \\ x_1 = x_0'^{h-1} x_1'^{n-h+1} \\ x_i = x_0'^{n-1} x_i' \\ x_r = x_0'^{n-1} x_r' - x_1'^n \end{array} \right.$$

$$(i = 2, 3, \dots, r-1).$$

Per queste corrispondenze si ha:

$$K(x) = x_0^{n(n-1)+h-1} x_1^{n-h}, \quad H(x') = x_0'^{nh-1} x_1'^{n(n-h)}$$

$$J(x) = n x_0^{2(n-1)+(r-1)(h-1)} x_1^{(r-1)(n-h)}, \quad J'(x') = n x_0'^{(r-1)(n-1)+2(h-1)} x_1'^{2(n-h)}.$$

Inoltre, si vede subito che  $T_1$  è pseudointera,  $T_n$  è intera, mentre ciascuna delle  $T_2, T_3, \dots, T_n$  è né intera né pseudointera. Tuttavia, ognuna delle corrispondenze  $T_h$  muta l'iperpiano  $x_1 = \lambda x_0$  ( $\lambda \neq 0$ ) nell'iperpiano  $x'_1 = \lambda x'_0$  e fra questi due iperpiani – variabili ciascuno in un fascio – subordina una corrispondenza cremoniana intera; precisamente,  $T_h$  subordina fra detti iperpiani l'omografia:

$$(\Omega) \left\{ \begin{array}{l} x'_0 = x_0 \\ x'_i = \lambda^{n-h} x_i \\ x'_r = \lambda^{n-h} x_r + \lambda^n x_0; \end{array} \right. \quad (\Omega^{-1}) \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \lambda^{n-h} x'_0 \\ x_i = x'_i \\ x_r = x'_r - \lambda^n x' \end{array} \right.$$

$$(i = 2, 3, \dots, r-1).$$