
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

SILVIO CINQUINI

Sopra un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 33 (1962), n.6, p. 401–404.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_6_401_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sopra un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari* ^(*). Nota I di SILVIO CINQUINI, presentata ^(**) dal Socio G. SANSONE.

In un lavoro di qualche anno fa ^(*) ho dato due teoremi di unicità per i sistemi di equazioni a derivate parziali della forma

$$(I) \quad \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial x} = f_j \left(x, y_1, \dots, y_m; z_1(\dots), \dots, z_r(\dots); \frac{\partial z_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_j}{\partial y_m} \right),$$

$$(j = 1, \dots, r).$$

Mentre la prima di tali proposizioni è valida nella classe delle soluzioni $z_j = z_j(x, y_1, \dots, y_m)$, ($j = 1, \dots, r$) continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine rispetto alle variabili $y_1, \dots, y_m$ (e tali $z_j(x, y_1, \dots, y_m)$ siano funzioni assolutamente continue della sola x), il secondo teorema ⁽²⁾ si riferisce al caso particolare, in cui il sistema (I) è quasi lineare, ma è più ampio il campo funzionale, nel quale esso è valido, nel senso che, mantenendo fisse le altre ipotesi sulle funzioni $z_j(x, y_1, \dots, y_m)$, si suppone (in luogo della continuità delle $\frac{\partial z_j}{\partial y_k}$, ($k = 1, \dots, m$)) che per quasi tutti gli x esse soddisfino a una disuguaglianza del tipo

$$|z_j(x, y_1^{[1]}, \dots, y_m^{[1]}) - z_j(x, y_1^{[2]}, \dots, y_m^{[2]})| \leq \sum_{k=1}^m \omega_{jk}(x) |y_k^{[1]} - y_k^{[2]}|$$

Nel caso generale, in cui il sistema (I) non è quasi-lineare, nessun ulteriore risultato è stato finora raggiunto, e pertanto è tuttora aperto il problema di ampliare il campo funzionale, nel quale è unica la soluzione del problema di Cauchy relativo al sistema (I): tale l'obiettivo delle presenti righe, nelle quali viene stabilito per il sistema (I) un nuovo teorema di unicità, il quale, pur non presentando la stessa generalità di quello citato per i sistemi quasi-lineari, arreca un significativo contributo al problema in questione. A tal riguardo è da aggiungere che, anche nel caso particolare, in cui le variabili indipendenti sono soltanto due, il risultato raggiunto nella presente ricerca è

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Gruppo n. 19).

(**) Nella seduta del 15 dicembre 1962.

(1) S. CINQUINI, *Sopra l'unicità della soluzione dei sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine*, « Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXXVIII, pp. 960-978 (1955). Nel seguito tale lavoro verrà indicato con *N.I.L.* Segnaliamo una svista tipografica: a p. 972, riga 18 in luogo di $x'' - x' \leq \gamma_n$ si legga $x'' - x' \leq \lambda_n$.

(2) Vedi *N.I.L.*, n. 5, p. 969: il teorema è esposto nel caso in cui le variabili indipendenti sono soltanto due, ma, come è detto esplicitamente a p. 961, esso sussiste qualunque sia il numero finito delle variabili indipendenti.

più ampio di quello, che si otterrebbe facendo appello all'artificio ⁽³⁾, che trasforma il sistema (1) in un sistema quasi-lineare in modo da poter usufruire del teorema di unicità già stabilito per questi ultimi sistemi.

La dimostrazione del presente teorema è nell'ordine di idee, che sono andato sviluppando nelle mie ricerche sulle equazioni a derivate parziali ⁽⁴⁾; e opportuni raffinamenti, introdotti nel procedimento approssimativo già seguito, hanno consentito di superare le nuove difficoltà.

I. TEOREMA. - Siano $L_k(x)$, ($k = 1, \dots, m$) m funzioni quasi-continue, non negative e integrabili ⁽⁵⁾ nell'intervallo $(0, a_0)$ con $a_0 > 0$, siano b_k, b'_k , ($k = 1, \dots, m$) $2m$ numeri reali con $b_k < b'_k$, sia a il massimo valore non superiore ad a_0 tale che, per ogni x con $0 \leq x < a$, siano verificate le disuguaglianze ⁽⁶⁾

$$(2) \quad \int_0^x L_k(u) du < \frac{b'_k - b_k}{2}, \quad (k = 1, \dots, m);$$

e si consideri il campo D definito dalle $m + 1$ disuguaglianze

$$D: \quad 0 \leq x \leq a; \quad b_k + \int_0^x L_k(u) du \leq y_k \leq b'_k - \int_0^x L_k(u) du, \quad (k = 1, \dots, m).$$

Siano $f_j(x, y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_r; u_1, \dots, u_m)$, ($j = 1, \dots, r$) r funzioni definite per ogni $(x, y_1, \dots, y_m)$ del campo D e per ogni $(r + m)$ -pla di numeri reali $(z_1, \dots, z_r; u_1, \dots, u_m)$, e tali che nel loro campo di definizione esistano finite le derivate parziali $\frac{\partial f_j}{\partial u_k}$, ($j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m$).

Si supponga che esistano due numeri positivi α, β con $\alpha \leq 1, \beta \leq 1$ e $r(r + m^2) + 1$ funzioni $H_0(x)$; $H_{ji}(x)$, ($j, i = 1, \dots, r$); $G_{jkv}(x)$, ($j = 1, \dots, r; k, v = 1, \dots, m$) quasi-continue, integrabili e non negative in $(0, a)$ in modo che le disuguaglianze

$$(3) \quad \left| f_j(x, y_1^{[1]}, \dots, y_m^{[1]}; z_1^{[1]}, \dots, z_r^{[1]}; u_1^{[1]}, \dots, u_m^{[1]}) - \right. \\ \left. - f_j(x, y_1^{[2]}, \dots, y_m^{[2]}; z_1^{[2]}, \dots, z_r^{[2]}; u_1^{[2]}, \dots, u_m^{[2]}) \right| \leq \\ \leq H_0(x) \sum_{k=1}^m |y_k^{[1]} - y_k^{[2]}|^\alpha + \sum_{i=1}^r H_{ji}(x) |z_i^{[1]} - z_i^{[2]}| + \sum_{k=1}^m L_k(x) |u_k^{[1]} - u_k^{[2]}|, \\ (j = 1, \dots, r)$$

(3) Per questo artificio cfr. M. CINQUINI CIBRARIO, *Nuovi teoremi di esistenza e di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali*, « Annali Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. IX, pp. 65-113 (1955), in particolare n. 18, p. 100.

(4) Vedi N.I.L. e anche S. CINQUINI, *Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine*. Note I e II. « Rend. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XVII, pp. 188-191 e 339-344 (1954); S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per i sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine*, « Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954 (Amsterdam) », vol. I, pp. 447-449 (1957).

(5) Anche nella presente Nota l'integrabilità va intesa nel senso di Lebesgue.

(6) Vale a dire nelle (2) per $x = a$ può anche valere l'uguaglianza.

siano verificate per quasi tutti gli x di $(0, a)$ e per tutte le $(2m+r)$ -ple $(y_1^{[1]}, \dots, y_m^{[1]}; z_1^{[1]}, \dots, z_r^{[1]}; u_1^{[1]}, \dots, u_m^{[1]}), (y_1^{[2]}, \dots, y_m^{[2]}; z_1^{[2]}, \dots, z_r^{[2]}; u_1^{[2]}, \dots, u_m^{[2]})$, tali che i punti $(x, y_1^{[1]}, \dots, y_m^{[1]}), (x, y_1^{[2]}, \dots, y_m^{[2]})$ appartengano al campo D , mentre su quasi tutte le intersezioni di D con una parallela all'asse x e per quasi tutti gli x sia

$$(4) \quad \left| \frac{\partial f_j(x, y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_r; u_1^{[1]}, \dots, u_m^{[1]})}{\partial u_k} - \frac{\partial f_j(x, y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_r; u_1^{[2]}, \dots, u_m^{[2]})}{\partial u_k} \right| \leq \sum_{v=1}^m G_{jkv}(x) |u_v^{[1]} - u_v^{[2]}|^\beta, \\ (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m),$$

per tutte le r -ple $(z_1, \dots, z_r)$ e per tutte le m -ple $(u_1^{[1]}, \dots, u_m^{[1]}), (u_1^{[2]}, \dots, u_m^{[2]})$.

Sotto queste ipotesi, se $\varphi_j(y_1, \dots, y_m), (j = 1, \dots, r)$ sono r funzioni continue nel campo

$$\Delta: \quad b_1 \leq y_1 \leq b'_1, \quad \dots, \quad b_m \leq y_m \leq b'_m,$$

non può esistere più di una r -pla di funzioni

$$z_1(x, y_1, \dots, y_m), \quad \dots, \quad z_r(x, y_1, \dots, y_m), \quad ((x, y_1, \dots, y_m) \text{ in } D),$$

tali che:

(I) ognuna di esse è continua;

(II) ognuna di esse per quasi tutti gli $(y_1, \dots, y_m)$ è funzione assolutamente continua della sola x ;

(III) per quasi tutti gli x di $(0, a)$ e per tutte le m -ple $(y_1^{[1]}, \dots, y_m^{[1]}), (y_1^{[2]}, \dots, y_m^{[2]})$, tali che i punti $(x, y_1^{[1]}, \dots, y_m^{[1]}), (x, y_1^{[2]}, \dots, y_m^{[2]})$ appartengano a D , sono verificate le disuguaglianze

$$(5) \quad |z_j(x, y_1^{[1]}, \dots, y_m^{[1]}) - z_j(x, y_1^{[2]}, \dots, y_m^{[2]})| \leq \sum_{k=1}^m \omega_{jk}(x) |y_k^{[1]} - y_k^{[2]}|, \\ (j = 1, \dots, r),$$

ove $\omega_{jk}(x)$ sono rm funzioni quasi continue, non negative in $(0, a)$ e tali che in questo intervallo siano integrabili i prodotti

$$\omega_{jk}(x) L_k(x), \quad (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m);$$

$$\omega_{ik}(x) H_{ji}(x), \quad (k = 1, \dots, m; j, i = 1, \dots, r);$$

(IV) esistono rm funzioni $\Psi_{jk}(x), (j=1, \dots, r; k=1, \dots, m)$ quasi continue, non negative in $(0, a)$ e tali che in questo intervallo siano integrabili i prodotti

$$\omega_{jk}(x) G_{jkv}(x) \Psi_{jv}^\beta(x), \quad (j = 1, \dots, r; k, v = 1, \dots, m),$$

in modo che a ogni $\varepsilon > 0$ ad arbitrio corrisponde un $\delta_0 > 0$, cosicchè le disuguaglianze

$$(6) \quad \left| \frac{\partial z_j(x, y_1 + \delta_1, \dots, y_m + \delta_m)}{\partial y_k} - \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_k} \right| \leq \Psi_{jk}(x) \varepsilon, \\ (j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m)$$

sono verificate per quasi tutti gli x e per ogni m -pla $\delta_1, \dots, \delta_m$, con $|\delta_v| \leq \delta_0, (v=1, \dots, m)$ e tale che i punti $(x, y_1 + \delta_1, \dots, y_m + \delta_m)$ appartengano al campo D ;

(V) su quasi tutte le intersezioni di D con una parallela all'asse x soddisfano, per quasi tutti gli x , al sistema

$$(I) \quad \frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial x} = f_j \left(x, y_1, \dots, y_m; z_1(\dots), \dots, z_r(\dots); \frac{\partial z_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_j}{\partial y_m} \right), \quad (j = 1, \dots, r),$$

e inoltre in ogni punto di Δ verificano le condizioni iniziali

$$(7) \quad z_j(0, y_1, \dots, y_m) = \varphi_j(y_1, \dots, y_m), \quad (j = 1, \dots, r).$$

2. OSSERVAZIONI. - Alla dimostrazione del teorema del n. 1, la quale verrà esposta nel n. 3⁽⁷⁾, premettiamo qualche osservazione:

a) Se il sistema (I) ha la forma

$$(I') \quad \frac{\partial z_j}{\partial x} = f_j \left(x, y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_r; \frac{\partial z_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_j}{\partial y_m} \right) + \\ + g_j(x, y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_r), \quad (j = 1, \dots, m),$$

per la validità del teorema di unicità del n. 1 è sufficiente che (ferme restando le ipotesi fatte sulle funzioni f_j) le funzioni g_j soddisfino a una condizione analoga a quella relativa alla (16) del n. 5 di *N.I.L.*.

b) Tenendo presente anche l'Osservazione fatta in a), si verifica facilmente che, per quanto si riferisce alle funzioni f_j , le ipotesi del teorema del n. 1 sono equivalenti a quelle della proposizione del n. 5 di *N.I.L.*, la quale stabilisce l'unicità della soluzione per i sistemi quasi lineari; peraltro, a motivo della condizione (IV) del n. 1 della presente Nota, il campo funzionale, nel quale è valido il citato teorema di unicità del n. 5 di *N.I.L.*, è più ampio.

c) Non ci soffermiamo su qualche lieve estensione, che può essere arrecata alle ipotesi del teorema del n. 1.

d) È ovvio che, se nel secondo membro della (3) si sostituisce al termine $H_0(x) \sum_{k=1}^m |y_k^{[1]} - y_k^{[2]}|^a$ la somma $\sum_{k=1}^m \Lambda_{jk}(x) |y_k^{[1]} - y_k^{[2]}|^a$, con $\Lambda_{jk}(x)$, ($j = 1, \dots, r; k = 1, \dots, m$) funzioni quasi continue, non negative e integrabili in $(0, a)$, non si ottiene alcuna estensione del teorema del n. 1, perché dalla nuova disuguaglianza segue la (3) assumendo $H_0(x) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^m \Lambda_{jk}(x)$.

D'altra parte, se nello stesso secondo membro della (3) si sostituisce alla somma $\sum_{i=1}^r H_{ji}(x) |z_i^{[1]} - z_i^{[2]}|$ il termine $H_j(x) \sum_{i=1}^r |z_i^{[1]} - z_i^{[2]}|$, le condizioni di validità del teorema stesso potrebbero subire qualche lieve restrizione, richiesta dall'integrabilità dei prodotti $\omega_{ik}(x) H_j(x)$, ($k = 1, \dots, m; j, i = 1, \dots, r$); inoltre, sotto un certo punto di vista, la relativa dimostrazione potrebbe essere più lunga, perché, come si vedrà al n. 3, β), il numero a' , definito dalle (11) e da cui dipende il campo D' , potrebbe divenire più piccolo.

e) È evidente che sussiste un'Osservazione del tutto analoga a quella del n. 7 di *N.I.L.*

(7) Il n. 3 forma oggetto della Nota II.