Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Z. Szmydt

L'unicité des solutions d'un problème de Dirichlet généralisé

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.6, p. 395–400.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_6_395_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *L'unicité des solutions d'un problème de Dirichlet généralisé.* Nota di ZOFIA SZMYDT, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Dans sa Note [1] G. Fichera a examiné l'unicité des solutions d'un problème de Dirichlet généralisé, relativement, soit à une classe particulière de fonctions harmoniques, soit dans le cas où le domaine Ω, dans lequel la solution est cherchée, est un cercle. Dans le théorème IV de la Note [4] j'ai construit une solution du problème en question (Problème D) dans le cas du domaine Ω plan, assez général. À présent je vais démontrer qu'il n'existe pas d'autres fonctions harmoniques qui vérifient les mêmes conditions aux limites généralisées. Ce résultat découle de l'isomorphisme entre un sous-ensemble des fonctions harmoniques dans Ω et celui des distributions définies sur le contour de Ω.

1. NOTATIONS. – Une courbe située dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$ sera désignée par Σ et dite courbe simple fermée lorsqu'elle admet la représentation paramétrique: $z = z(s)$ pour $0 \leq s \leq L$ où (i) $z(s)$ est une fonction continue avec sa dérivée première $z'(s)$ et périodique de période L $(L > 0)$; (ii) $z(s_1) = z(s_2)$ avec $0 \leq s_1 < s_2 \leq L$ si, et seulement si, $s_1 = 0$ et $s_2 = L$. On suppose en plus que (iii) $|z'(s)| = 1$ lorsque $0 \leq s \leq L$. Σ sera dite de classe C^n lorsque la fonction périodique $z(s)$ est de classe C^n. Si en outre la dérivée $z^{(n)}(s)$ vérifie la condition de Lipschitz, la courbe Σ sera dite de classe C_1^n. Nous dirons que la représentation paramétrique $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$ de la courbe simple fermée de classe C^n est normale, lorsque $z(s)$ est une fonction de classe C^n satisfaisant aux conditions (i)–(iii).

Dans la suite on désignera par ρ un nombre positif, par r un nombre réel arbitraire et par m un entier non négatif.

Soit Ω le domaine limité par la courbe Σ: $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$, et soit n_z le vecteur normal au point z de Σ dirigé vers l'intérieur de Ω. On désignera par Σ_r la courbe: $z = z_r(s)$, $0 \leq s \leq L$ où $z_r(s) = x_r(s) + iy_r(s)$ et $x_r(s) = x(s) - ry'(s)$, $y_r(s) = y(s) + rx'(s)$. À chaque fonction f, définie sur la courbe $z = z_r(s)$ on fait correspondre la fonction $\tilde{f}_r(s) = f[z_r(s)]$, $0 \leq s \leq L$. Nous dirons que $f(z)$ est une fonction de classe $C^m(\Sigma_r)$, lorsque la fonction périodique $\tilde{f}_r(s)$ est de classe C^m. On a: $\Sigma = \Sigma_0$, et $\tilde{f} = \tilde{f}_0$.

Soit $D_m(\Sigma)$ l'espace réel de fonctions réelles $f(z) \in C^m(\Sigma)$, avec la norme définie par la formule: $\|f\| = \sum_{k=0}^{m} \max_{0 \leq s \leq L} |\tilde{f}^{(k)}(s)|$.

(*) Nella seduta del 15 dicembre 1962.

On désignera par F, G les distributions d'ordre $\leq m$, c'est-à-dire les éléments du dual $D'_m(\Sigma)$.

Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^2_1 et r_0 un nombre positif assez petit afin que, pour chaque $0 \leq r \leq r_0$, la courbe Σ_r résulte fermée, et telle que $z_r(s_1) = z_r(s_2)$ avec $s_1 < s_2$ si, et seulement si, $s_1 = 0$ et $s_2 = L$. Supposons que $u \in C^0(\Sigma_r)$, $0 \leq r \leq r_0$. On désignera par $\psi_{ur}(z_r)$ la solution de l'équation intégrale:

$$u(\zeta_r) = \int_{\Sigma_r} \psi(z_r) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_r - \zeta_r| \, ds_{z_r} - \pi\psi(\zeta_r)$$

et par $\varphi_{ur}(z_r)$ celle de l'équation:

$$u(\zeta_r) = \int_{\Sigma_r} \varphi(z_r) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z_r - \zeta_r| \, ds_{z_r} - \pi\varphi(\zeta_r).$$

Soit $E_m(\Omega)$ l'espace des fonctions $u(z)$ harmoniques dans le domaine Ω et telles que la fonction

$$\sup_{p \in D_m(\Sigma)} \frac{\left| \int_{\Sigma_\rho} p(z_\rho) \psi_{u\rho}(z_\rho) \, ds_{z_\rho} \right|}{\| p \|} \qquad \text{où} \quad p(z_\rho) = p(z) \qquad \text{lorsque} \quad z \in \Sigma$$

résulte bornée dans l'intervalle $0 < \rho \leq r_0$.

D'autre part soit $K^m(\Sigma, +)$ l'ensemble des fonctions q ayant les propriétés suivantes: (a) $q \in C^m(\Sigma_r)$ pour chaque $0 \leq r \leq r_0$; (b) $\lim_{r \to 0} \tilde{q}_r^{(j)}(s) = \tilde{q}_0^{(j)}(s)$ avec $\tilde{q}_r(s) = q[z_r(s)]$, $j = 0, 1, \cdots, m$, uniformément dans l'intervalle $0 \leq s \leq L$.

2. *Problème* D. – Soit donnée une distribution $F \in D'_m(\Sigma)$. On cherche une fonction u, harmonique à l'intérieur du domaine Ω, vérifiant la condition aux limites généralisée:

$$\text{(1)} \qquad \lim_{\rho \to 0} \int_{\Sigma_\rho} q(z_\rho) \, u(z_\rho) \, ds_{z_\rho} = F[q(z)] \qquad \text{pour chaque} \quad q \in K^m(\Sigma, +).$$

THÉORÈME. – *Supposons que* Σ *soit une courbe simple fermée de classe* C^{m+3}. *Soit* $F \in D'_m(\Sigma)$. *La formule:*

$$\text{(2)} \qquad G[f] = F[\varphi_{f0}(z)] \qquad \text{lorsque} \quad f \in D_m(\Sigma)$$

définit une transformation biunivoque S *de l'espace* $D'_m(\Sigma)$ *en lui-même. La transformation inverse* S^{-1} *est donnée par:*

$$\text{(3)} \qquad F[q] = G[\Phi_q] \qquad \text{où} \quad \Phi_q(\zeta) = \int_{\Sigma} q(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| \, ds_z - \pi q(\zeta)$$

$$\text{pour chaque} \quad q \in D_m(\Sigma).$$

Si $G \in D'_m(\Sigma)$, *la fonction* $u(z)$, *définie par la formule:*

$$u(z) = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta|\right] \quad \text{lorsque} \quad z \in \Omega \tag{4}$$

vérifie la condition aux limites généralisée:

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\Sigma_\varrho} q(z_\varrho) u(z_\varrho) ds_{z_\varrho} = G[\Phi_q] \quad \text{pour chaque} \quad q \in K^m(\Sigma, +). \tag{5}$$

La transformation T, *définie par* (2) *et* (4) *établit l'isomorphisme des espaces linéaires* $D'_m(\Sigma)$ *et* $E_m(\Omega)$. *Son inverse* T^{-1} *est donnée par* (1).

Le Problème D *admet une et une seule solution. Elle est donnée par* (4) *où la fonctionnelle* G *est définie par* (2).

Remarque. – Dans le théorème IV de (4) nous avons démontré l'existence et l'unicité des solutions du Problème D dans la classe $H_m(\Omega)$ de fonctions $u(z)$ de la forme (4). Vu que cette classe de fonctions est un sous-ensemble propre de l'ensemble de toutes les fonctions harmoniques dans le domaine Ω, le présent résultat est plus général que le précédent. En outre il découle de notre Théorème que les ensembles $E_m(\Omega)$ et $H_m(\Omega)$ coïncident.

Nous nous baserons dans la suite sur six lemmes, dont le premier peut être démontré pareillement au lemme 2 de [3].

LEMME 1. – Choisissons arbitrairement une représentation paramétrique normale $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$ de la courbe simple fermée Σ de classe C^{m+3}. Soit $z_r = z_r(s)$, $\zeta_r = z_r(\sigma)$.

Il existe alors des constantes $A > 0$ et ρ_0, $0 < \rho_0 \leq r_0$ ainsi que les fonctions $Q_i(s, \sigma)$, $(i = 1, 2)$; $R_j(s, \sigma)$, $(j = 1, 2, 3)$, de classe C^m dans l'ensemble $-\infty < s < \infty$, $-\infty < \sigma < \infty$ telles que

$$\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z_r - \zeta_r| = \frac{Q_1(s, \sigma) + rQ_2(s, \sigma)}{R_1(s, \sigma) + rR_2(s, \sigma) + r^2 R_3(s, \sigma)} \quad \text{lorsque} \quad s \neq \sigma,$$

et que $R_1(s, \sigma) + rR_2(s, \sigma) + r^2 R_3(s, \sigma) \geq A$ lorsque $0 \leq s \leq L$, $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$ et $0 \leq r \leq \rho_0$.

LEMME 2. – Soit $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$, une représentation paramétrique normale arbitraire de la courbe simple fermée Σ de classe C^{m+3}. À chaque r, $0 \leq r \leq \rho_0$ correspond une fonction $\Xi_r(\sigma, s)$, continue dans le carré Π: $0 \leq s \leq L$, $0 \leq \sigma \leq L$ et telle que si $p(z_r) \in C^0(\Sigma_r)$ et $\tilde{\varphi}_{pr}(s) = \varphi_{pr}[z_r(s)]$, l'identité suivante a lieu:

$$\tilde{\varphi}_{pr}(\sigma) \equiv -\frac{1}{\pi} \tilde{p}_r(\sigma) - \frac{1}{\pi} \int_0^L \tilde{p}_r(s) \Xi_r(\sigma, s) ds \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq \sigma \leq L. \tag{6}$$

Les fonctions $\Xi_r(\sigma, s)$ admettent des dérivées et on a:

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\partial^j}{\partial \sigma^j} \Xi_\varrho(\sigma, s) = \frac{\partial^j}{\partial \sigma^j} \Xi_0(\sigma, s), \qquad j = 0, 1, \cdots, m, \tag{7}$$

uniformément dans le rectangle: $0 \leq s \leq L$, $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$.

Démonstration. – Soit $N(\zeta_r, z_r)$ la fonction égale à $\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\log|z_r - \zeta_r|$ lorsque $z_r \neq \zeta_r$ et continue pour tous les $z_r, \zeta_r \in \Sigma_r$. La solution $\tilde{\varphi}_{pr}(s)$ de l'équation:

$$(8)\qquad \tilde{\varphi}_{pr}(\sigma) = \int_0^L \tilde{\varphi}_{pr}(s)\, N[z_r(\sigma), z_r(s)]\,\frac{ds_r}{ds}\,ds - \frac{1}{\pi}\tilde{p}_r(\sigma)$$

peut être mise sous la forme (6) où $\Xi_r(\sigma, s)$ désigne le noyau résolvant de l'équation (8). En vertu des formules de Fredholm qui donnent l'expression analytique de la résolvante on constate que $\Xi_r(\sigma, s)$ est une fonction continue dans Π et en s'appuyant de plus sur le Lemme 1 on démontre les relations (7).

LEMME 3. – Si Σ est une courbe simple fermée de classe C^{m+3} et si $p \in K^m(\Sigma, +)$, la fonction: $q(z_r) = \varphi_{pr}(z_r)$ lorsque $z_r \in \Sigma_r$, $0 \leq r \leq \rho_0$, appartient aussi à l'espace $K^m(\Sigma, +)$.

Démonstration. – Soit $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$ et $z = z^*(\tau)$, $0 \leq \tau \leq L$ où $z^*(\tau) = z(\tau + L/2)$ deux représentations paramétriques normales de la courbe Σ. Soit $\tilde{\varphi}_{pr}(\sigma) = \varphi_{pr}[z_r(\sigma)]$ et $\tilde{\tilde{\varphi}}_{pr}(\tau) = \varphi_{pr}[z_r^*(\tau)]$. Il résulte du Lemme 2 que les dérivées $\tilde{\varphi}_{pr}^{(j)}(\sigma)$, $\tilde{\tilde{\varphi}}_{pr}^{(j)}(\tau)$, $j = 0, 1, \cdots, m$ existent; elles sont continues dans les intervalles $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$ et $L/5 \leq \tau \leq L$ respectivement et on a en outre:

$$(9)\qquad \lim_{\rho\to 0}\tilde{\varphi}_{p\rho}^{(j)}(\sigma) = \tilde{\varphi}_{p0}^{(j)}(\sigma) \text{ uniformément lorsque } L/5 \leq \sigma \leq 4L/5,$$

$$(10)\qquad \lim_{\rho\to 0}\tilde{\tilde{\varphi}}_{p\rho}^{(j)}(\tau) = \tilde{\tilde{\varphi}}_{p0}^{(j)}(\tau) \text{ uniformément lorsque } L/5 \leq \tau \leq 4L/5.$$

Vu que $\frac{d^j}{d\tau^j}\tilde{\tilde{\varphi}}_{pr}(\tau) = \frac{d^j}{d\tau^j}\tilde{\varphi}_{pr}(\tau + L/2)$, la fonction $\varphi_{pr}(z_r)$ appartient à la classe $C^m(\Sigma_r)$ et d'après les relations (9) et (10) on a: $\lim_{\rho\to 0}\tilde{\varphi}_{p\rho}^{(j)}(\sigma) = \tilde{\varphi}_{p0}^{(j)}(\sigma)$, $j = 0, 1, \cdots, m$, uniformément dans l'intervalle $0 \leq \sigma \leq L$. Le Lemme 3 se trouve ainsi démontré.

Voici encore le lemme suivant:

LEMME 4. – Si Σ est une courbe simple fermée de classe C^{m+3}, l'espace $E_m(\Omega)$ coïncide avec celui des fonctions $u(z)$ harmoniques dans Ω et telles que la fonction:

$$(11)\qquad \sup_{p\in D_m(\Sigma)} \frac{\left|\int_{\dot{\Sigma}_\rho} u(z_\rho)\,\varphi_{p\rho}(z_\rho)\,ds_{z_\rho}\right|}{\|p\|} \quad \text{où } p(z_\rho) = p(z) \text{ lorsque } z\in\Sigma,$$

résulte bornée dans l'intervalle $0 < \rho \leq \rho_0$. On a en outre [1]:

$$(12)\qquad \int_{\dot{\Sigma}_\rho} u(z_\rho)\,\varphi_{p\rho}(z_\rho)\,ds_{z_\rho} = \int_{\dot{\Sigma}_\rho} p(z_\rho)\,\psi_{u\rho}(z_\rho)\,ds_{z_\rho} \quad \text{lorsque } 0 < \rho \leq \rho_0.$$

(1) La relation (12) se laisse démontrer aisément si l'on s'appuie sur les définitions des fonctions $\varphi_{ur}(z_r)$ et $\psi_{ur}(z_r)$, données dans le paragraphe 1. La première thèse du Lemme 4 est une conséquence immédiate de la relation (12).

LEMME 5. – Si Σ est une courbe simple fermée de classe C^{m+3}, à chaque $u \in E_m(\Omega)$ correspond une fonctionnelle $G \in D'_m(\Sigma)$ telle que $u(z) = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta|\right]$ lorsque $z \in \Omega$.

Démonstration. – Supposons que $u \in E_m(\Omega)$ et considérons dans l'espace $D'_m(\Sigma)$ une famille, dépendante du paramètre ρ, des fonctionnelles $G_\varrho[v] = \int\limits_\Sigma v(\zeta)\, \psi_{u\varrho}(\zeta_\varrho) \frac{ds_{\zeta_\varrho}}{ds_\zeta} ds_\zeta$. Vu notre hypothèse, la fonction $\|G_\varrho\|$ est bornée dans l'intervalle $0 < \rho \leq \rho_0$. Il existe donc (2) une suite $\{\rho_n\}$ et une fonctionnelle $G \in D'_m(\Sigma)$ telles que: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} G_{\varrho_n}[v] = G[v]$ pour chaque $v \in D_m(\Sigma)$. Soit: $z_0 \in \Omega$, $v_n(\zeta) = \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |\zeta_{\varrho_n} - z_0|$ et $v(\zeta) = \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |\zeta - z_0|$. Attendu que: $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(\zeta) = v(\zeta)$ dans l'espace $D_m(\Sigma)$, on a: $\lim\limits_{n\to\infty} G_{\varrho_n}[v_n] = G[v]$, c'est-à-dire:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Sigma_{\varrho_n}} \psi_{u\varrho_n}(\zeta_{\varrho_n}) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |\zeta_{\varrho_n} - z_0|\, ds_{\zeta_{\varrho_n}} = G\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |\zeta - z_0|\right].$$

Le Lemme 5 en résulte car $u(z) \equiv \int\limits_{\Sigma_\varrho} \psi_{u\varrho}(\zeta_\varrho) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |\zeta_\varrho - z|\, ds_{\zeta_\varrho}$ pour chaque z situé à l'intérieur du domaine limité par la courbe Σ_ϱ.

LEMME 6. – Soit Σ une courbe simple fermée de classe C^{m+3} et soit $u(z)$ une fonction continue dans le domaine Ω. Supposons que $F \in D'_m(\Sigma)$ et que la relation (1) soit satisfaite.

Dans ces hypothèses la fonction (11) est bornée dans l'intervalle $0 < \rho \leq \rho_0$.

Démonstration. – Soit $p \in D_m(\Sigma)$ et $p(z_\varrho) = p(z)$ lorsque $z \in \Sigma$ et $0 < \rho \leq \rho_0$. Vu que $\varphi_{p\varrho}(z_\varrho)$ dépend linéairement de p, la fonctionnelle $F_\varrho[p] = \int\limits_{\Sigma_\varrho} u(z_\varrho)\, \varphi_{p\varrho}(z_\varrho)\, ds_{z_\varrho}$ est linéaire. En s'appuyant sur le Lemme 2 on démontre aisément que $F_\varrho[p] \in D'_m(\Sigma)$. D'autre part il résulte de l'hypothèse (1) et du Lemme 3 que: $\lim\limits_{\varrho\to 0} F_\varrho[p] = F[\varphi_{p_0}(z)]$ pour chaque $p \in D_m(\Sigma)$. En vertu du théorème de Banach-Steinhaus (3) il existe donc une constante M telle que: $\|F_\varrho\| \leq M$ lorsque $0 < \rho \leq \rho_0$, ce qui entraîne notre assertion.

Démonstration du Théorème. – C'est en utilisant le Lemme 2 qu'on prouve facilement que $\varphi_{f_0}(z) \in C^m(\Sigma)$ (4) lorsque $f \in C^m(\Sigma)$ et que la fonctionnelle G, définie par (2) appartient à l'espace $D'_m(\Sigma)$. D'autre part, d'après le théorème II de [4], $\Phi_q \in C^m(\Sigma)$ lorsque $q \in C^m(\Sigma)$ et la relation (5) est satisfaite.

(2) Cf. [1] p. 123.
(3) Cf. [1] p. 123.
(4) Cf. aussi le Lemme 3 de la présente Note.

L'équation $f = \Phi_q$, où $f \in D_m(\Sigma)$, ayant une solution unique $q = \varphi_{f_0}$, on en déduit que la transformation S est biunivoque et que son inverse est donnée par (3).

En vertu des Lemmes 6 et 4 chaque solution du Problème D appartient à l'espace $E_m(\Omega)$ et d'après les relations (5) et (3), la fonction $u(z)$, définie par (4), où la fonctionnelle G est donnée par (2), est une solution du Problème D. Il en résulte: 1° l'image de la transformation T, définie dans $D_m(\Sigma)$ par (2) et (4), est contenu dans $E_m(\Omega)$; 2° la transformation T est biunivoque et T^{-1} est donné par (1). C'est en se basant sur le Lemme 5 qu'on complète la démonstration du Théorème.

Ouvrages cités.

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[2] G. Fichera, *Teorema di massimo modulo e unicità delle soluzioni generalizzate dei problemi al contorno*, « Atti della Accademia Nazionale dei Lincei », serie VIII, vol. 29, fasc. 6, 503–508 (1960).

[3] Z. Szmydt, *Sur l'approximation par des polynômes harmoniques sur le contour d'un domaine plan*, « Annales Polonici Mathematici », XI, 283–305 (1962).

[4] Z. Szmydt, *Sui problemi di Dirichlet e di Neuman con dati al contorno generalizzati*, « Atti della Accademia Nazionale dei Lincei », serie VIII, vol. 32, fasc. 6, 867–872, (1962).