
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIUSEPPE ARCIDIACONO

Sul tensore energetico dello schema "fluido perfetto - campo elettromagnetico"

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 33 (1962), n.5, p. 297-302.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_297_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Sul tensore energetico dello schema « fluido perfetto – campo elettromagnetico »*^(*). Nota di GIUSEPPE ARCIDIACONO, presentata ^(**) dal Socio A. SIGNORINI.

1. PREMessa. — Come è noto, il gruppo di Galileo, sul quale è basata la fisica classica, risulta caso-limite per c tendente all'infinito del gruppo di Lorentz (a 10 parametri) della fisica relativistica.

Nel 1954 il Fantappié ha dimostrato ⁽¹⁾ che a sua volta il gruppo di Lorentz è caso-limite, al tendere all'infinito di un certo numero r , di un nuovo gruppo, il « gruppo di Fantappié ». E siccome quest'ultimo gruppo, a differenza dei due precedenti, è « semplice » esso non risulta più caso-limite di altri gruppi a 10 parametri. Per tale motivo il Fantappié chiamava « relatività finale » la teoria costruita a partire da tale gruppo ⁽²⁾. In questa teoria, il cronotopo di Minkowski viene sostituito da uno spazio-tempo ancora a 4 dimensioni, ma non più piatto, bensì dotato di una curvatura costante $1/r^2$, ed il gruppo di Fantappié ci dà i movimenti in sé di tale cronotopo. Ne segue, in virtù di un noto teorema della teoria dei gruppi ⁽³⁾, che il gruppo di Fantappié è isomorfo al gruppo delle rotazioni (complesse) di S_5 .

In una serie di Note Lincee del 1955–56 ho esteso formalmente le equazioni di Maxwell allo spazio pseudoeuclideo S_5 , rendendole in tal modo invarianti per il gruppo di Fantappié ⁽⁴⁾ ed ho mostrato che le equazioni più generali così ottenute descrivono un campo G_{AB} a 10 componenti ⁽⁵⁾, che al limite relativistico si decompone in due campi $F_{ik} = -F_{ki}$ e C_k , rispettivamente a 6 e 4 componenti, identificabili il primo con il campo elettromagnetico ed il secondo col campo idrodinamico (relativistico).

In questa Nota mi propongo di completare tale risultato facendo vedere come il tensore energetico T_{AB} del campo G_{AB} , tensore già costruito nella Nota precedente ⁽⁶⁾ coincide nella sua parte spazio-temporale T_{ik} col tensore

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n° 36 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno Accademico 1962–63.

(**) Nella seduta del 17 novembre 1962.

(1) L. FANTAPPIÉ, *Su una nuova teoria di relatività finale*, « Rend. Acc. Lincei », ser. 8^a, vol. 17, fasc. 5 (1954).

(2) Noi però non useremo tale locuzione, che può dar luogo ad equivoci.

(3) L. BIANCHI, *Geometria differenziale*, vol. 2°, parte 2^a, p. 437, Zanichelli, Bologna 1930.

(4) G. ARCIDIACONO, *Sull'importanza del gruppo base nel problema della unificazione dei campi fisici; Le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di relatività finale; Sul campo elettromagnetico generalizzato*, « Rend. Acc. Lincei », ser. 8^a, vol. XVIII, fasc. 4, 5, 6 (1955).

(5) Indicheremo con le lettere maiuscole $A, B, C \dots$ gli indici variabili da 1 a 5, con le lettere minuscole $a, b, c \dots$ gli indici variabili da 1 a 4 e con le lettere greche $\alpha, \beta, \gamma \dots$ gli indici variabili da 1 a 3.

(6) G. ARCIDIACONO, *La elettrodinamica e la idrodinamica nella « teoria di relatività finale »*, « Rend. Acc. Lincei », ser. 8^a, vol. XX, fasc. 5 (1956).

energetico di uno schema « fluido perfetto-campo elettromagnetico », sotto la condizione che il fluido sia incompressibile: si conferma così per una nuova via puramente gruppale la validità di una definizione di incompressibilità relativistica, assegnata dal Lichnerowicz: $p = \mu_0 c^2$, secondo la quale essa equivale al propagarsi delle onde di pressione con la velocità c della luce.

Quanto alle componenti T_{5i} del tensore energetico, si trova che esse generalizzano il vettore di Poynting, mentre la componente T_{55} può essere interpretata come densità di azione del campo.

2. LA TEORIA DI MAXWELL GENERALIZZATA. – Il problema di scrivere le equazioni di Maxwell nel cronotopo di De Sitter era stato affrontato da vari Autori, tra i quali ricorderemo il Dirac ⁽⁷⁾, il Corben ⁽⁸⁾ ed altri.

Per tale estensione si richiede l'uso di un formalismo pentadimensionale, e tali Autori si sono limitati a trascrivere le equazioni elettromagnetiche $\text{rot } F_{ik} = 0$; $\text{div } F_{ik} = J_k$, facendo variare gli indici dei tensori da 1 a 5, invece che da 1 a 4.

Invece un esame critico, da me svolto nei lavori precedentemente citati, ha condotto ad una generalizzazione che mi sembra più naturale. Si cominciò a tale scopo coll'esaminare il passaggio dalle equazioni della elettrostatica in S_3 alle equazioni dello elettromagnetismo in S_4 e si riconobbe che in tale passaggio non vi era alcun cambiamento formale, purché i due gruppi di equazioni venissero scritti nella forma « aggiunta ».

Ciò suggeriva in modo immediato la generalizzazione delle equazioni di Maxwell a spazi ad un numero maggiore di dimensioni, in base al criterio di scrivere le equazioni nella forma aggiunta ed aumentare solamente la variabilità degli indici da 1 a 5, invece che da 1 a 4. Pertanto, le equazioni di Maxwell generalizzate risultano le seguenti:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \text{Rot } G_{IK} = J_{IKL} \\ \text{Div } G_{IK} = 0 \end{cases}$$

con le condizioni di integrabilità

$$(2.2) \quad \text{Rot } J_{IKL} = 0.$$

Le equazioni (2.1) si possono spezzare nel seguente modo:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \text{rot } G_{ik} = J_{ikl} \\ \text{div } G_{ik} + \frac{1}{r} \partial_5 G_{i5} = 0 \end{cases} \quad (2.4) \quad \begin{cases} \text{rot } G_{i5} + \frac{1}{r} \partial_5 G_{ik} = J_{ik5} \\ \text{div } G_{i5} = 0 \end{cases}$$

dove si sono indicati con rot e div gli operatori nello iperpiano $x_5 = \text{cost.}$

Le (2.2) si spezzano a loro volta in

$$(2.5) \quad \text{rot } J_{ike} = 0; \quad (2.6) \quad \text{rot } J_{iks} + \frac{1}{r} \partial_5 J_{ikl} = 0.$$

(7) P. A. M. DIRAC, *The electron wave equation in De Sitter space*, « Annals of Mathematics », 36, 657 (1935).

(8) H. C. CORBEN, *A classical theory of electromagnetism and gravitation*, « Physical Review », 69, 225 (1946 a).

Al limite relativistico ($r \rightarrow \infty$) il tensore doppio antisimmetrico G_{IK} dà luogo al tensore antisimmetrico G_{ik} di S_4 e ad i due vettori $G_{i5} = -G_{5i}$, mentre il tensore triplo antisimmetrico J_{IKL} ci dà il tensore triplo J_{ikl} ed il tensore doppio J_{ik5} di S_4 .

Possiamo quindi porre

$$(2.7) \quad G_{i5} = C_i \quad ; \quad J_{ik5} = \Omega_{ik}$$

e le equazioni (2.3), (2.4) si riducono alle seguenti:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \text{rot } G_{ik} = J_{ikl} \\ \text{div } G_{ik} = 0 \end{cases} \quad (2.9) \quad \begin{cases} \text{rot } C_i = \Omega_{ik} \\ \text{div } G_i = 0 \end{cases}$$

con le condizioni rispettive di integrabilità

$$(2.10) \quad \text{rot } J_{ikl} = 0 \quad ; \quad (2.11) \quad \text{rot } \Omega_{ik} = 0.$$

Le (2.8) sono identificabili con le ordinarie equazioni di Maxwell (scritte in forma aggiunta) mentre le equazioni (2.9) descrivono un nuovo campo C_k a 4 componenti, di cui preciseremo la interpretazione.

3. IL TENSORE G_{AB} ED IL GRUPPO DI FANTAPPIÉ. — A questo punto possiamo fare la seguente osservazione che mette in evidenza il legame esistente tra le componenti del campo G_{AB} e la struttura del gruppo di Fantappié.

Il tensore doppio antisimmetrico G_{AB} ha 10 componenti e cioè tante quanti sono i parametri del gruppo di Fantappié, che individuano una rotazione (complessa) di S_5 . Ora è noto ⁽⁹⁾ che le trasformazioni finite del gruppo delle rotazioni di S_5 si possono costruire a partire da una matrice antisimmetrica R del 5° ordine, nel seguente modo:

$$(3.1) \quad x' = e^R x$$

ed i 10 elementi distinti di questa matrice infinitesima si possono considerare come *parametri canonici ortogonali* della trasformazione (3.1), anzi formano un tensore doppio antisimmetrico R_{AB} dello spazio S_5 su cui opera il gruppo. Indicati allora con r i tre parametri canonici della *rotazione*, con v quelli del *trascinamento*, con t quelli della *traslazione nello spazio* e con t_0 quello della *traslazione nel tempo*, i due tensori antisimmetrici R_{AB} e G_{AB} sono dati da:

$$(3.2) \quad R_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & r_3 & -r_2 & v_1 & -t \\ -r_3 & 0 & r_1 & v_2 & -t_2 \\ r_3 & -r_1 & 0 & v_3 & -t_3 \\ \hline -v_1 & -v_2 & -v_3 & 0 & -t_0 \\ \hline t_1 & t_2 & t_3 & t_0 & 0 \end{bmatrix},$$

(9) L. BIANCHI, *Teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Bologna, Zanichelli, 1928.

$$(3.3) \quad G_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 & -C_1 \\ -E_2 & 0 & E_1 & H_2 & -C_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 & -C_3 \\ \hline -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 & -C_0 \\ \hline C_1 & C_2 & C_3 & C_0 & 0 \end{array} \right].$$

Si può stabilire allora un interessante parallelismo tra il comportamento dei 10 parametri canonici ortogonali del gruppo di Fantappié e le 10 componenti del campo, quando le costanti universali c ed r che figurano nel gruppo di Fantappié tendono all'infinito (gruppo di Lorentz per $c \rightarrow \infty$ e gruppo di Galileo per $c, r \rightarrow \infty$).

I tre gruppi di Galileo, di Lorentz e di Fantappié risultano, come si è detto, l'uno caso-limite dell'altro, e possiamo fare il seguente schema che ne mette in evidenza la loro struttura:

Gruppo di Galileo	Gruppo di Lorentz	Gruppo di Fantappié
Gl_{3+1}^{10}	$Lz_{3+1}^{10}(c)$	$Fn_{3+1}^{10}(c, r)$
Rotazioni R_3^3	$\left. \begin{array}{l} \text{Rotazioni } R_4^6 \\ \text{Traslazioni } T_4^4 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \text{Rotazioni } R_5^{10} \end{array} \right\}$
Trascinamenti Tr_3^3		
Trasl. spaziali T_3^3		
Trasl. temporali T_1^1		

Con riferimento a questo schema si vede subito che passando dalla fisica classica a quella relativistica, le rotazioni spaziali r ed i trascinamenti v vengono a formare un unico tensore doppio antisimmetrico del cronotopo di Minkowski (rotazione infinitesima di S_4), mentre le traslazioni spaziali t e quelle temporali t_0 vengono a formare un unico vettore di S_4 (traslazione infinitesima di S_4). In corrispondenza, il campo elettrico $\mathbf{E}$ e quello magnetico $\mathbf{H}$ si riuniscono (tramite la costante universale c) nel tensore elettromagnetico F_{ik} , ed il vettore $\mathbf{C}$ e lo scalare C_0 (che come si vedrà al n° 4, sono proporzionali al vettore impulso ed allo scalare energia) si riuniscono in un unico vettore C_k di S_4 .

Passando invece alla relatività di Fantappié, le rotazioni e le traslazioni cronotopiche vengono a formare un unico tensore antisimmetrico R_{AB} (rotazione infinitesima di S_5), ed in corrispondenza il campo elettromagnetico F_{ik} si salda al campo C_k per formare un unico tensore antisimmetrico G_{AB} di S_5 .

4. IL TENSORE ENERGETICO DEL « FLUIDO PERFETTO-CAMPO ELETTROMAGNETICO ». - Da quanto si è detto, appare chiaramente che se la relatività di Fantappié riflette un qualche significato fisico, essa riunirà presumibil-

mente in una sola teoria l'elettromagnetismo e la meccanica dei mezzi continui, che nella relatività ristretta risultano tra di loro indipendenti.

Effettivamente, se introduciamo il tensore energetico T_{AB} del campo elettromagnetico generalizzato ⁽⁶⁾

$$(4.1) \quad T_{AB} = G_{AC} G^C_B + \frac{1}{4} \delta_{AB} G_{CD} G^{CD}$$

possiamo scriverne le varie componenti, mettendo in evidenza l'indice 5, al modo seguente:

$$(4.2) \quad \begin{cases} T_{ik} = (G_{is} G^s_k + \frac{1}{4} \delta_{ik} G_{rs} G^{rs}) + (G_{i5} G^5_k + \frac{1}{2} \delta_{ik} G_{s5} G^{s5}) \\ T_{i5} = G_{is} G^s_5 \\ T_{55} = G_{5s} G^s_5 + \frac{1}{4} G_{rs} G^{rs} + \frac{1}{2} G_{r5} G^{r5} \end{cases}$$

cioè, tenendo conto delle posizioni (2.7):

$$(4.3) \quad \begin{cases} T_{ik} = (G_{is} G^s_k + \frac{1}{4} \delta_{ik} G_{rs} G^{rs}) - (C_i C_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} C_s C^s) \\ T_{\alpha 5} = C_\alpha H_\alpha + (\mathbf{E} \wedge \mathbf{C})_\alpha \quad ; \quad T_{45} = \mathbf{C} \times \mathbf{H} \\ T_{55} = \frac{1}{2} [(E^2 - H^2) + (C_\alpha^2 - C^2)]. \end{cases}$$

Su tali formule si constata che per $r \rightarrow \infty$, T_{ik} è un tensore di S_4 e si decompone in due parti: il tensore energetico del campo elettromagnetico ed un nuovo tensore energetico, che è naturale – in base a quanto si è detto – identificare col tensore energetico dei fluidi perfetti, venendo così ad interpretare T_{ik} come il tensore energetico dello schema « fluido perfetto-campo elettromagnetico », secondo la locuzione di Lichnerowicz ⁽¹⁰⁾.

Per tale identificazione, occorre che si abbia:

$$(4.4) \quad C_i C_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} C_s C^s = \mu_o^* U_i U_k + p \delta_{ik}$$

dove p è la pressione, μ_o la densità propria di massa propria e $\mu_o^* = \mu_o + \frac{p}{c^2}$ ⁽¹¹⁾.

Ne segue che dovrà aversi

$$(4.5) \quad C_i = \sqrt{\mu_o^*} U_i \quad \text{con} \quad U_i U^i = -c^2$$

ed inoltre:

$$-\frac{1}{2} C_s C^s = p \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{2} \left(\mu_o + \frac{p}{c^2} \right) c^2 = p$$

da cui

$$(4.6) \quad \boxed{p = \mu_o c^2}.$$

(10) A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*, Masson, Paris 1955, p. 17.

(11) C. CATTANEO, *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione*, Veschi, Roma 1961, pp. 126 e 131.

La (4.5) ci dice che il vettore C_i non è altro che il vettore « corrente idrodinamica » e la (4.6) ci dà la condizione di incompressibilità del fluido. In conseguenza la prima equazione (2.9) definisce il tensore antisimmetrico « vortice », mentre la seconda equazione (2.9) esprime, sotto altra forma, la incompressibilità del fluido.

Se allora poniamo per brevità:

$$(4.7) \quad \mu^* = \frac{\mu_0^*}{1 - v^2/c^2} = \frac{\mu_0 + \rho/c^2}{1 - v^2/c^2}$$

dalle (4.3) si vede che accanto al noto vettore *densità relativa di quantità di moto* $g_a = \frac{1}{c} T_{a4}$, cioè

$$(4.8) \quad \mathbf{g} = \frac{1}{c} (C_0 \mathbf{C} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \mu^* \mathbf{v} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$$

appare un nuovo vettore $g'_a = \frac{1}{c} T_{a5}$ così esprimibile:

$$(4.9) \quad \mathbf{g}' = \frac{1}{c} (C_0 \mathbf{H} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{C}) = \sqrt{\mu^*} \left(\mathbf{H} - \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{E} \right).$$

Inoltre, mentre la componente T_{44} ci dà una *densità relativa di energia totale*

$$(4.10) \quad W = \frac{1}{2} (E^2 + H^2) + (\mu^* c^2 - \rho)$$

la componente T_{55} sembra generalizzare l'*azione elettromagnetica* per unità di volume e per unità di tempo, che nella relatività ristretta era un invariante:

$$(4.11) \quad W' = \frac{1}{2} [(E^2 - H^2) + \mu_0^* c^2] = \frac{1}{2} (E^2 - H^2) + \rho.$$

Infine si ha

$$(4.12) \quad T_{45} = T_{54} = i \mathbf{C} \times \mathbf{H} = i \sqrt{\mu^*} \mathbf{v} \times \mathbf{H}.$$

I due invarianti $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ ed $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ del campo elettromagnetico, vengono generalizzati nel modo indicato nella Nota ⁽⁶⁾, e cioè, adoperando i simboli qui adottati:

$$(4.13) \quad \begin{cases} \mathfrak{I}_2 = (E^2 - H^2) - \mu_0^* c^2 \\ \mathfrak{I}_4 = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mu^* (c\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{H})^2 - \mu^* (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^2 \end{cases}$$

essi sono stati ottenuti ⁽¹²⁾ prendendo i coefficienti di secondo e di quarto grado della equazione caratteristica della matrice (3.3).

(12) G. ARCIDIACONO, *Sui gruppi ortogonali negli spazi a 3, 4, 5 dimensioni*, « Portugaliae Mathematica », vol. 14, fasc. 2 (1955).