ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

NICOLAS JEAN IONESCU PALLAS

Su una nuova dimostrazione della variazione della massa in rapporto alla velocità

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 33 (1962), n.5, p.
289–291.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_289_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Su una nuova dimostrazione della variazione della massa in rapporto alla velocità.* Nota di NICOLAS JEAN IONESCU-PALLAS, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

Le dimostrazioni che conducono alla celebre formula di variazione della massa d'inerzia di un corpo, nel quadro della relatività ristretta, possono essere divise in due grandi gruppi: dimostrazioni indirette o elettrodinamiche e dimostrazioni dirette o meccaniche. Dal secondo gruppo osserviamo i seguenti metodi descritti nel libro di H. Arzelès, *La Dynamique relativiste*.

Il metodo di P. Langevin, F. Perrin e G. Allard basato su considerazioni energetiche generali e sulla cinematica relativista applicata a due coppie identiche di corpi puntuali.

Il metodo di R. G. Tolman e di G. N. Lewis basato sulla conservazione dell'impulso di un sistema di particole nel caso di uno scontro elastico.

Il metodo di H. Malet nel quale si presuppone conosciuta la legge di trasformazione delle forze e si fa richiamo alla composizione relativista infinitesimale delle velocità.

Il metodo di V. Lalan ha quale punto di partenza l'assioma secondo cui due sistemi meccanici isoenergetici in un sistema d'inerzia dato, resta tale in qualsiasi altro sistema inerte.

Nel libro di A. Einstein, *The Meaning of Relativity* il problema si risolve col postulare un'espressione nello spazio di Mincowski del tensore energia-impulso, nel caso di una particola libera.

Una delle serie difficoltà nella dinamica relativista è quella che, a differenza della dinamica newtoniana, l'equazione

$$(1) \quad \frac{d}{dt} (m(\vec{v}^2) \vec{v}) = \vec{F}$$

non è invariante parte con parte. Pertanto, nelle dimostrazioni aventi quale scopo di chiarire la funzione $m(v^2)$, è preferibile evitare il concetto tridimensionale di forza. Il metodo di R. G. Tolman e G. N. Lewis sebbene ingenuo, fa comunque appello a due configurazioni del sistema di particole (prima e dopo lo scontro) ed, implicitamente, al concetto di forza, per passare dall'una all'altra. Questa obiezione si mantiene allorché si analizzano le altre varianti tridimensionali. Nel metodo di V. Lalan ad esempio, questo concetto è implicato nello stabilire il legame tra le funzioni massa e energia. Nel nostro metodo, per evitare questa difficoltà, facciamo appello ad una sola configurazione di corpi libera di azioni esterne e, in più, trascuriamo le interazioni interne.

(*) Nella seduta del 17 novembre 1962.

Ammettiamo quale punto di partenza l'assioma: « Il centro di massa di un sistema di corpi libero di azioni esterne si muove inerte, simile ad un punto materiale in cui sarebbe concentrata l'intera massa del sistema ».

Siano, per cominciare la dimostrazione, le trasformazioni di Lorentz ed Einstein scritte sotto forma vettoriale

$$(2) \quad \begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + \left(1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \vec{V}t + \left[\left(1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right] \frac{\vec{V} \vec{r}}{\vec{V}^2} \vec{V} \\ t' = \left(1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left[t + \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{c^2}\right]. \end{cases}$$

Per il caso di una trasformazione infinitesimale di velocità $\vec{\delta V}$, le equazioni (2) diventano

$$(3) \quad \vec{r}' = \vec{r} + t \vec{\delta V} \quad ; \quad t' = t + \frac{1}{c^2} \vec{r} \cdot \vec{\delta V}.$$

Col passaggio da un sistema inerte ad un altro che si muove con la velocità $\vec{\delta V}$ rispetto al primo, le velocità cambiano secondo la formula

$$(4) \quad \vec{v}' = \vec{v} \left(1 - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{\delta V}\right) + \vec{\delta V}$$

mentre i loro moduli secondo quanto segue:

$$(5) \quad v'^2 = v^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) 2 \vec{v} \cdot \vec{\delta V}.$$

Dalla definizione, il centro di massa è il punto di spazio di fronte al quale l'impulso totale del sistema di corpi è nullo

$$(6) \quad \vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Naturalmente, il centro di massa può essere scelto come origine di un sistema inerte. Secondo l'assioma sul movimento del centro di massa, la sua « massa di riposo » è

$$(7) \quad M(0) = \sum_i m_i \left(\frac{v_i^2}{c^2}\right).$$

Col passaggio a un altro sistema inerte che si muove con la velocità $\vec{\delta V}$ rispetto al centro di massa, la variazione dell'impulso totale del sistema può essere calcolato in due modi. Innanzitutto, dall'assioma enunciato, abbiamo

$$(8) \quad \vec{\delta P} = M(0) \vec{\delta V}$$

perché si presuppone che $M(0)$ abbia la stessa proprietà inerte che $m_0(0)$ e quindi, nel sistema di riferimento nuovo, ottenuto con la trasformazione infinitesimale, $M(\vec{\delta V}^2)$ differisce da $M(0)$ soltanto per infinitesimi d'ordine superiore. D'altra parte, possiamo impiegare le formule (3), (4) e (5) per

fare il passaggio dal sistema nuovo al sistema vecchio (il centro di massa), il che ci dà

$$(9) \quad \vec{\delta P} = (\sum_i m_i(\vec{v}_i^2)] \vec{\delta V} + 2 \frac{1}{c^2} \sum_i \left[c^2 \left(1 - \frac{\vec{v}_i^2}{c^2} \right) \frac{\partial m_i}{\partial \vec{v}_i^2} - \frac{1}{2} m_i(\vec{v}_i^2) \right] (\vec{v}_i \vec{\delta V}) \vec{v}_i .$$

Dall'identificazione delle formule (8) e (9) e tenendo presente anche la formula (7), risulta che la seconda somma dell'equazione (9) dev'essere nulla. Siccome le particole sono state sin dall'inizio presupposte indipendenti tra loro, otteniamo così l'equazione differenziale

$$(10) \quad c^2 \left(1 - \frac{\vec{v}_i^2}{c^2} \right) \frac{\partial m_i}{\partial \vec{v}_i^2} - \frac{1}{2} m_i(\vec{v}_i^2) = 0$$

la quale, con l'integrazione, dà la ben nota formula di variazione della massa con la velocità

$$m_i(\vec{v}_i^2) = m_i(0) \left(1 - \frac{\vec{v}_i^2}{c^2} \right)^{-1/2} .$$

In tutto il corso della dimostrazione abbiamo presupposto che per una particola libera, la massa d'inerzia dipende soltanto dal quadrato della velocità, questo, considerandosi una conseguenza dell'isotropia dello spazio (Landau et Lifschitz, *Mécanique Analytique*).

BIBLIOGRAFIA.

- HENZI ARZELIÈS, *La Dynamique Relativiste*, Paris, Gauthier Villars, 1957.
 ALBERT EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, Pinceton 1956.
 L. LANDAU et M. LIFCHITZ, *La Mécanique Théorique*, Moscou 1960.