
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MARIO COMO

**La piastra circolare volante, la piastra su tre
appoggi puntiformi e problemi che ad esse si
riferiscono. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 33 (1962), n.5, p.
281–288.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_281_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *La piastra circolare volante, la piastra su tre appoggi puntiformi e problemi che ad esse si riferiscono.* Nota II ^(*) di MARIO COMO, presentata dal Socio G. KRALL.

1. *Piastra circolare su tre appoggi circolari puntiformi equidistanti con carico del tipo*

$$(10) \quad p(r, \theta) = p_0 r^n \cos \theta$$

per n intero qualsiasi.

L'integrale particolare $w_0(r, \theta)$ che rappresenta la deformata della piastra appoggiata lungo tutto il contorno e sollecitata dal carico (10) è fornito da

$$(11) \quad w_0(r, \theta) = (A_1 r^{n+4} + A_2 r + A_3 r^3) \cos \theta \quad (1)$$

con:

$$(12) \quad A_1 = \frac{p}{BR^n} \frac{1}{(n+1)(n+3)^2(n+5)}$$

$$(12') \quad A_2 = \frac{pR^3}{2B(3+\nu)} \frac{(n+4)(n+3) + \nu(n+1) - 6}{(n+1)(n+3)^2(n+5)}$$

$$(12'') \quad A_3 = -\frac{pR}{2B(3+\nu)} \frac{n+4+\nu}{(n+1)(n+3)(n+5)}.$$

La reazione al contorno vale:

$$(13) \quad (V_r)_{r=R} = \frac{pR}{n+3} \cos \theta.$$

Poiché la posizione dei tre appoggi crea nella deformata un asse di simmetria di equazione $\theta = 0$, l'integrale generale viene più semplicemente espresso da:

$$(14) \quad w_1(r, \theta) = A_0 + C_0 r^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + C_m r^{m+2}) \cos m\theta.$$

D'altra parte, con semplici considerazioni di equilibrio, per le reazioni N_1, N_2 ed N_3 si hanno i valori:

$$(15) \quad N_1 = \frac{2}{3} \frac{\pi p R^2}{n+3} \quad ; \quad N_2 = N_3 = -\frac{1}{3} \frac{\pi p R^2}{n+3}.$$

Le costanti incognite A_m e C_m vengono quindi determinate coll'imporre le condizioni al contorno (9) e (9').

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1962.

(1) Se si pone $n = 1$ si ha:

$$A_1 = \frac{p}{192 BR} \quad ; \quad A_2 = \frac{pR^3}{192 B} \frac{7+\nu}{3+\nu} \quad ; \quad A_3 = -\frac{2pR}{192 B} \frac{5+\nu}{3+\nu}$$

e si ricade nelle formule riportate dal Timoshenko.

Si deduce così, con riferimento alle (6):

$$(16) \quad w(r, \theta) = w_0(r, \theta) - \frac{\rho R^4 \rho \cos \theta}{2(n+3)(3+\nu)B} \sum_{2,4,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} \left[\frac{m(\nu-1)-2(1+\nu)}{m(\nu-1)} - \frac{m-1}{m+1} \right] + \\ + \frac{\rho R^4}{2(n+3)(3+\nu)B} \sum_{2,4,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} \left[\frac{m(\nu-1)-2(1+\nu)}{m(\nu-1)} \rho^m - \frac{m-1}{m+1} \rho^{m+2} \right] \cos m\theta.$$

Per i momenti M_r ed M_t si ha inoltre:

$$(17) \quad M_r = M_{r0} + \frac{\rho R^2}{2(n+3)(3+\nu)} \sum_{2,4,5,\dots}^{\infty} \frac{m(\nu-1)-2(1+\nu)}{m} (\rho^{m-2} - \rho^m) \cos m\theta$$

$$(17') \quad M_t = M_{t0} + \\ + \frac{\rho R^2}{2(n+3)(3+\nu)} \sum_{2,4,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{(1-\nu)m+2(1+\nu)}{m} \rho^{m-2} + \frac{m(\nu-1)+2(1+\nu)}{m} \rho^m \right] \cos m\theta.$$

Le serie (17) e (17') che rappresentano i momenti M_r ed M_t hanno una convergenza ben più lenta della serie (13) che definisce la superficie elastica della piastra.

TABELLA I.

Valori di $w \cdot \frac{B}{\rho R^4}$ con $p(r, \theta) = p\rho \cos \theta$.

$\theta \backslash \rho$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0°	— 0,009.259	— 0,013.905	— 0,014.214	— 0,009.167	— 0
15°	— 0,009.146	— 0,013.954	— 0,015.746	— 0,013.089	— 0,007.822
30°	— 0,008.701	— 0,014.832	— 0,019.130	— 0,021.361	— 0,022.969
45°	— 0,007.836	— 0,015.041	— 0,002.150	— 0,028.217	— 0,034.963
60°	— 0,006.428	— 0,014.078	— 0,022.984	— 0,032.269	— 0,041.861
75°	— 0,004.402	— 0,011.411	— 0,020.062	— 0,030.889	— 0,041.838
90°	— 0,001.773	— 0,006.866	— 0,014.639	— 0,024.134	— 0,034.305
105°	+ 0,001.326	— 0,000.567	— 0,005.231	— 0,012.411	— 0,021.106
120°	+ 0,004.640	+ 0,006.852	+ 0,007.108	+ 0,004.563	0
135°	+ 0,007.820	+ 0,014.781	+ 0,020.960	+ 0,025.035	+ 0,028.927
150°	+ 0,010.473	+ 0,021.698	+ 0,033.770	+ 0,045.495	+ 0,057.273
165°	+ 0,012.238	+ 0,026.262	+ 0,042.768	+ 0,059.569	+ 0,076.806
180°	+ 0,012.837	+ 0,028.157	+ 0,045.968	+ 0,064.583	+ 0,083.722

È importante mettere quindi in evidenza che è possibile calcolarne la funzione somma ricorrendo alla teoria delle serie di potenze in campo complesso. In tal via si ottiene:

$$\begin{aligned}
 (18) \quad M_r = M_{r_0} + \frac{pR^2(\rho^2 - 1)}{2(n+3)(3+\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{(1+\rho^2)\cos\theta(\cos 3\theta - \rho^3) + (1-\rho^2)\sin\theta\sin 3\theta}{(1-\rho^3\cos 3\theta)^2 + \rho^6\sin^2 3\theta} + \right. \\
 \left. + 2(1+\nu) \left[\frac{1}{6\rho^2} \ln \frac{(\rho^2\cos 2\theta + \rho\cos\theta + 1)^2 + (\rho^2\sin 2\theta + \rho\sin\theta)^2}{(1+\rho^2 - 2\rho\cos\theta)^2} - \frac{1}{\rho} \cos\theta \right] \right\} \\
 (18') \quad M_t = M_{t_0} + \frac{pR^2}{2(n+3)(3+\nu)} \left\{ (1-\nu)(1-\rho^2) \frac{(1+\rho^2)\cos\theta(\cos 3\theta - \rho^3) + (1-\rho^2)\sin\theta\sin 3\theta}{(1-\rho^3\cos 3\theta)^2 + \rho^6\sin^2 3\theta} + \right. \\
 \left. + 2(1+\nu)(1+\rho^2) \left[\frac{1}{6\rho^2} \ln \frac{(\rho^2\cos 2\theta - \rho\cos\theta + 1)^2 + (\rho^2\sin 2\theta + \rho\sin\theta)^2}{(1+\rho^2 - 2\rho\cos\theta)^2} - \frac{1}{\rho} \cos\theta \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

2. Si sono studiati i casi della variazione lungo r secondo rette e parabola rispettivamente del secondo e terzo ordine. Pertanto, per $n = 1, 2$ e 3 , sono riportati nelle Tabelle I, II, III per $\nu = 0, 1$, i valori di w . B/pR^4 in funzione di ρ e θ .

TABELLA II.

Valori di $w \cdot \frac{B}{pR^4}$ con $p(r, \theta) = p\rho^2 \cos\theta$.

$\theta \backslash \rho$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0°	— 0,007.025	— 0,010.781	— 0,010.827	— 0,007.026	— 0
15°	— 0,006.948	— 0,011.023	— 0,012.071	— 0,010.174	— 0,006.258
30°	— 0,006.630	— 0,011.568	— 0,014.834	— 0,016.843	— 0,018.375
45°	— 0,005.999	— 0,011.790	— 0,017.336	— 0,022.356	— 0,027.970
60°	— 0,004.951	— 0,011.091	— 0,018.115	— 0,025.662	— 0,033.489
75°	— 0,003.422	— 0,009.039	— 0,016.341	— 0,024.631	— 0,033.470
90°	— 0,001.418	— 0,005.493	— 0,011.711	— 0,019.307	— 0,027.444
105°	+ 0,000.361	— 0,000.543	— 0,004.326	+ 0,010.009	— 0,016.885
120°	+ 0,003.521	+ 0,005.390	+ 0,005.414	+ 0,003.497	0
135°	+ 0,005.986	+ 0,011.529	+ 0,016.384	+ 0,019.804	+ 0,023.142
150°	+ 0,008.047	+ 0,017.061	+ 0,026.546	+ 0,036.150	+ 0,045.818
165°	+ 0,009.420	+ 0,020.870	+ 0,033.689	+ 0,047.358	+ 0,061.446
180°	+ 0,009.887	+ 0,022.182	+ 0,036.230	+ 0,051.359	+ 0,066.978

TABELLA III.

Valori di $w \cdot \frac{B}{pR^4}$ con $p(r, \theta) = p\rho^3 \cos \theta$.

$\theta \backslash \rho$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0°	— 0,005.644	— 0,008.646	— 0,008.696	— 0,005.665	0
15°	— 0,005.586	— 0,008.861	— 0,009.743	— 0,008.295	— 0,005.215
30°	— 0,005.342	— 0,009.348	— 0,012.078	— 0,013.991	— 0,015.313
45°	— 0,004.850	— 0,009.586	— 0,014.215	— 0,018.495	— 0,023.309
60°	— 0,004.021	— 0,009.074	— 0,014.932	— 0,021.290	— 0,027.907
75°	— 0,002.797	— 0,007.445	— 0,013.533	— 0,020.477	— 0,027.892
90°	— 0,001.182	— 0,004.577	— 0,009.759	— 0,016.089	— 0,022.870
105°	+ 0,000.746	— 0,000.540	— 0,003.690	— 0,008.389	— 0,013.071
120°	+ 0,002.829	+ 0,004.323	+ 0,004.348	+ 0,002.820	0
135°	+ 0,004.840	+ 0,009.413	+ 0,013.422	+ 0,016.374	+ 0,019.285
150°	+ 0,006.524	+ 0,013.922	+ 0,021.888	+ 0,029.961	+ 0,038.182
165°	+ 0,007.647	+ 0,017.066	+ 0,027.758	+ 0,39.281	+ 0,051.204
180°	+ 0,008.029	+ 0,018.144	+ 0,029.865	+ 0,042.608	+ 0,055.815

Nella fig. 1, per $n = 1, 2, 3$, sono illustrate per vari valori di θ , le sezioni della superficie elastica $w(r, \theta)$ con piani verticali; le linee a tratteggio, continua e punteggiata, corrispondono rispettivamente ai casi di $n = 1; 2; 3$, e la scala di lettura è $1 \text{ cm} = 0,025 \frac{pR^4}{B}$. La deformazione della piastra è resa poi particolarmente evidente dalla rappresentazione a curve di livello, delle fig. 2.

I momenti M_r si annullano al contorno mentre per M_t si ricava:

$$(19) \quad (M_t)_{\theta=1} = (M_t)_{\theta=1} + \frac{2pR^2}{n+3} \frac{1+\nu}{3+\nu} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(\cos 2\theta + \cos \theta + 1)^2 + (\sin 2\theta + \sin \theta)^2}{4(1 - \cos \theta)^2} - \cos \theta \right].$$

Al centro si ha:

$$(20) \quad (M_r)_{\theta=0} = - \frac{pR^2}{(3+n)(3+\nu)} \cdot \cos \theta$$

$$(20') \quad (M_t)_{\theta=0} = \frac{pR^2}{(3+n)(3+\nu)} \cdot \cos \theta$$

Nella Tabella IV sono riportati per $n = 1, 2, 3$, i valori di M_r/pR^2 e M_{θ}/pR^2 rispettivamente per $\rho = 0,5$ e $\rho = 1$.

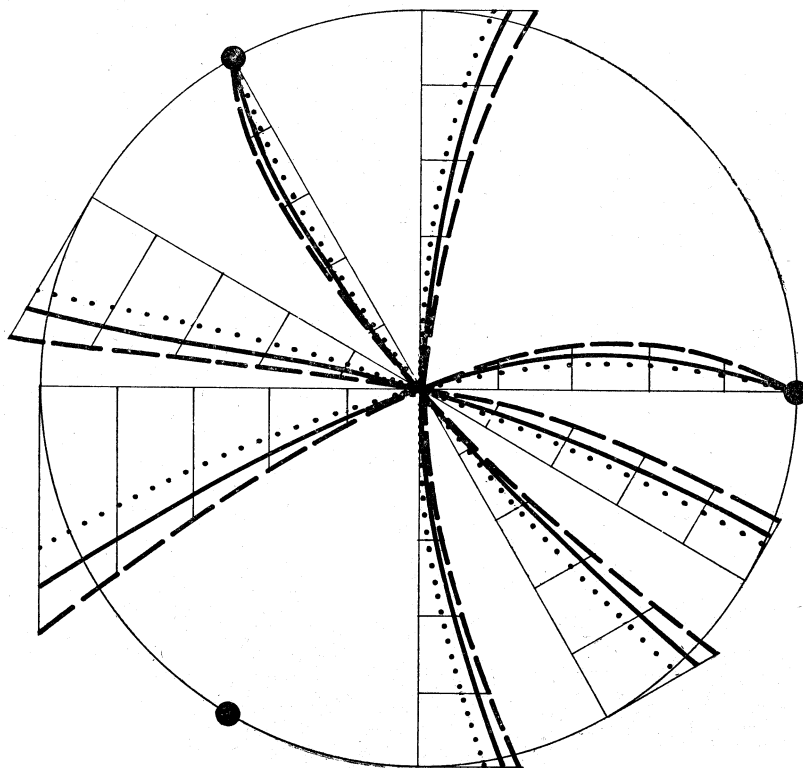


Fig. 1.

Per completezza si riportano le espressioni degli M_{r_0} e M_{θ_0} corrispondenti all'integrale particolare w_0 e quindi alla piastra appoggiata su tutto il contorno e caricata dal carico secondo la distribuzione espressa dalla (10).

Si ha con la (11),

$$(11 a) \quad M_{r_0} = -B \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \right\} =$$

$$= -B \{ A_1 (n+3) (n+4+\nu) r^{n+2} + 2 A_3 r (3+\nu) \} \cos \theta$$

$$(11 b) \quad M_{\theta_0} = -B \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) =$$

$$= -B \{ A_1 (n+3) [1+\nu (n+4)] r^{n+2} + 2 A_3 r (1+3\nu) \} \cos \theta \quad (2).$$

(2) Se si pone $n = 1$ si ricava con le (12); (12'); (12'')

$$M_{r_0} = \frac{\rho R^2}{48} (5+\nu) \rho (1-\rho^2) \cos \theta$$

$$M_{\theta_0} = \frac{\rho R^2}{48} \frac{\rho}{3+\nu} [(5+\nu) (1+3\nu) - (1+5\nu) (3+\nu) \rho^2] \cos \theta$$

ricadendo così nelle formule riportate dal Timoshenko pp. 286.

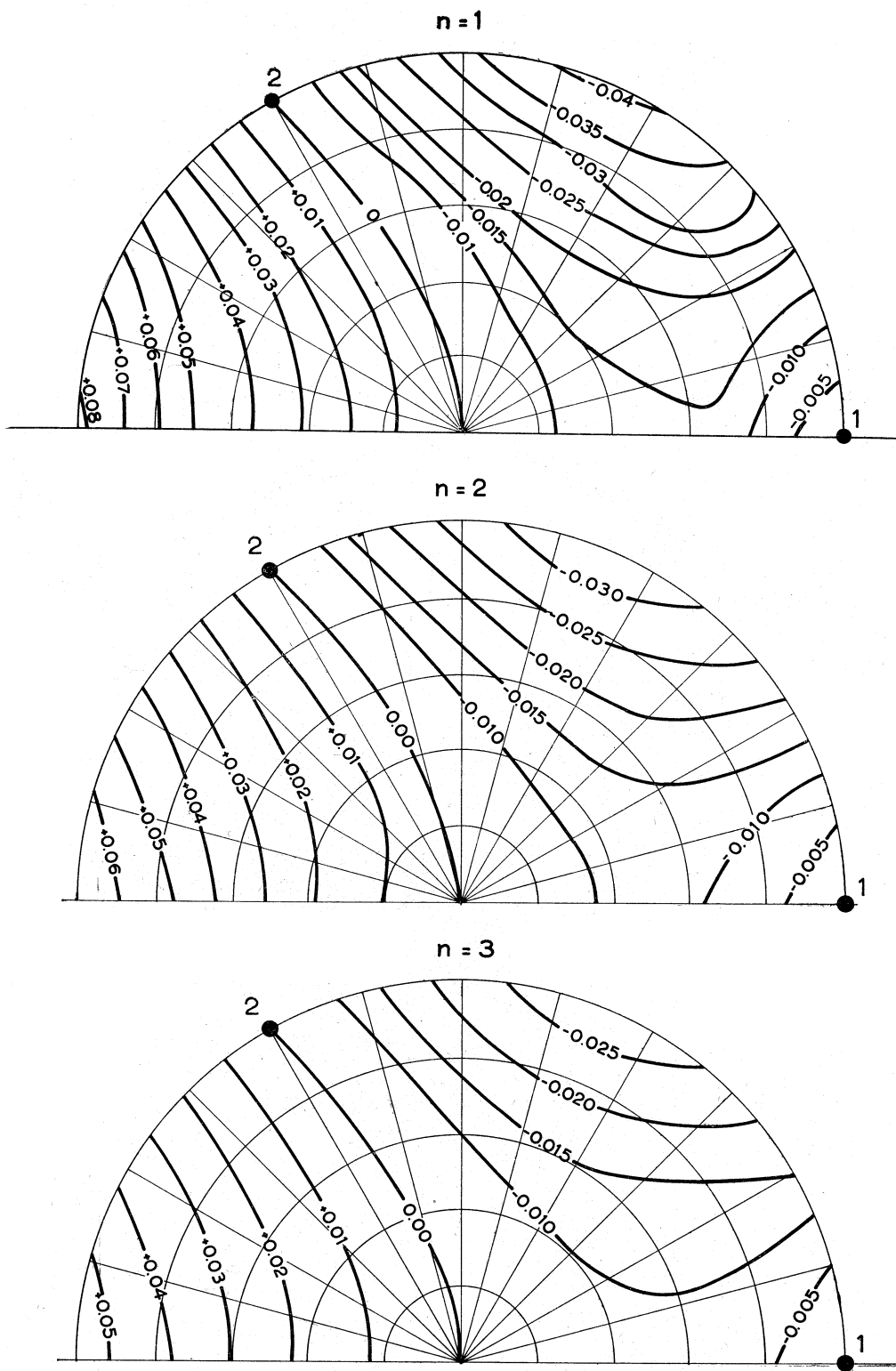


TABELLA IV.
Valori dei momenti M_r e M_t .

θ	$p(r, \theta) = p_0 \cos \theta$				$p(r, \theta) = p_0^2 \cos \theta$				$p(r, \theta) = p_0^3 \cos \theta$			
	$\left(\frac{M_r}{pR^2}\right)_{q=0,5}$	$\left(\frac{M_r}{pR^2}\right)_{q=0,5}$	$\left(\frac{M_t}{pR^2}\right)_{q=1}$	$\left(\frac{M_r}{pR^2}\right)_{q=0,5}$	$\left(\frac{M_r}{pR^2}\right)_{q=0,5}$	$\left(\frac{M_t}{pR^2}\right)_{q=1}$	$\left(\frac{M_r}{pR^2}\right)_{q=0,5}$	$\left(\frac{M_t}{pR^2}\right)_{q=0,5}$	$\left(\frac{M_r}{pR^2}\right)_{q=0,5}$	$\left(\frac{M_t}{pR^2}\right)_{q=0,5}$	$\left(\frac{M_t}{pR^2}\right)_{q=1}$	$\left(\frac{M_r}{pR^2}\right)_{q=1}$
0°	- 0,11830	+ 0,08649	+ ∞	- 0,08818	+ 0,07266	+ ∞	- 0,06964	+ 0,06271	+ ∞			
30°	- 0,05385	+ 0,01209	- 0,02783	- 0,03749	+ 0,01268	- 0,02095	- 0,02791	+ 0,01244	- 0,01663			
60°	+ 0,01296	- 0,05392	- 0,05437	+ 0,01359	- 0,04139	- 0,04274	- 0,01325	- 0,03342	- 0,03513			
90°	+ 0,04973	- 0,06907	- 0,04100	+ 0,03978	- 0,05526	- 0,03280	+ 0,03315	- 0,04605	- 0,02733			
120°	+ 0,05913	- 0,04323	- ∞	+ 0,04408	- 0,03663	- ∞	+ 0,03481	- 0,03135	- ∞			
150°	+ 0,00463	+ 0,05655	+ 0,06884	- 0,00189	+ 0,04223	+ 0,05376	- 0,00490	+ 0,03332	+ 0,04397			
180°	- 0,02602	+ 0,10795	+ 0,10864	- 0,02727	+ 0,08289	+ 0,08547	- 0,02658	+ 0,06692	+ 0,07028			

BIBLIOGRAFIA.

- A. NADÁI, *Elastische Platten*, Berlin 1925.
K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*, Springer, Wien 1956.
S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of plates and shells*, Mc. Graw Hill, 1959.