Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Salvatore Cherubino

Conservazione dell'energia ed efficienza dei sistemi economici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.5, p. 276–280.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_276_0¿

Economia matematica. — *Conservazione dell'energia ed efficienza dei sistemi economici.* Nota di SALVATORE CHERUBINO, presentata [*] dal Socio B. SEGRE.

Il principio di conservazione dell'energia pei sistemi economici si può stabilire, come in termodinamica, partendo dall'*entropia* [1], attraverso la nozione di *campo di reversibilità* qui introdotta nel n. 1. La validità di questo principio è del tutto generale, quindi non contrasta con l'entropicità né con la sintropicità del sistema.

La sintropicità non è sufficiente per assicurare la possibilità di raggiungere fini più o meno particolari, ad esempio benessere o progresso sociale. Una classificazione delle trasformazioni economiche che distingua quelle che favoriscono da quelle che contrastano il conseguimento di quel fine, oppure che sono indifferenti rispetto ad esso, pur potendo concepirsi in linea di principio, non è un problema risolvibile agevolmente, sia pure soltanto in teoria. Sembra invece meno arduo stabilire criteri che misurino, con sufficiente approssimazione, i gradi di efficienza della produzione, ovvero dei redditi specifici, delle surproduzioni, del surlavoro e simili dei vari settori del sistema, in rapporto ad un fine proposto. Questi gradi di efficienza si assumeranno come pesi da attribuire alle produzioni (in ispecie, in volume od in valore), ai redditi, ecc., nel calcolo dell'entropia del sistema economico. Si riesce così a constatare se si ha una sintropia efficiente per ciò che si desidera ottenere, oppur no.

La istituzione dei criteri di efficienza può presentare difficoltà sia teoriche che pratiche assai gravi quando si voglia risolvere il problema per una sottoeconomia [2] non del tutto indipendente dall'economia totale del sistema, senza incidere, cioè porre in forse, la risolubilità del problema generale. È però ovvio che la nozione di entropia–sintropia può introdursi anche in un sol settore o industria.

1. L'entropia S di un sistema economico considerato in un intervallo (t_0, t_1) di regolarità (o ciclo di produzione) fu definita sulla coppia $\mathbf{R}, \boldsymbol{p}$ dei

(*) Nella seduta del 17 novembre 1962.

(1) Cfr. S. CHERUBINO, *Energia, entropia, sintropia di un sistema economico*, «Rend. Lincei», ser. VIII, vol. XXXI, novembre 1961, pp. 218–221.

(2) Per la nozione di sottoeconomia e di quasi sottoeconomia vedasi la mia Nota: *Sull'espansione lineare economica* («Rend. Mat. Roma», vol. 18, 1–2, pp. 140–156 (1959)) ed una mia ricerca sull'«Industria», n. 3, § I, pp. 333–364 (1961), nonché un articolo nel volume sulla matrice siderurgica italiana («Collana di ricerche gestionali e di mercato», Roma 1962) *Appendice scientifica*, pp. 383–391 e pp. 404–406.

vettori del reddito e dei prezzi di costo, con riferimento alla surproduzione $\mathbf{S}^*$, ponendo:

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{1}$$

$$Q = \boldsymbol{p}\mathbf{R}_{-1} = TV \quad ; \quad V = \boldsymbol{p}\mathbf{S}^*_{-1}\,. \tag{2}$$

Tenuto conto che è:

$$\mathbf{R}_{-1} \geqq \mathbf{S}^*_{-1} = [I - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}_{-1} - \mathbf{Y}^*_{-1} \tag{3}$$

con $\mathbf{X}\,,\mathbf{Y}^*$ rispettivamente vettore delle n produzioni e dei corrispondenti consumi necessari (ammortamenti compresi), $\boldsymbol{a}$ matrice dei coefficienti tecnici o di scambio del sistema, si ha: $V \geqq 0\,,\ T \geqq 1$.

Invece che alla surproduzione ci si può riferire al vettore del surlavoro $\mathbf{Z}^* = \boldsymbol{p}\,[I - \boldsymbol{a}] - \mathbf{Z}$, essendo $\mathbf{Z}$ il vettore dei costi di forza-lavoro necessaria per produzione unitaria di ciascun settore (con relative spese annesse). Si avrà allora $V = \mathbf{Z}^*\, u_{-1}$ con u vettore ad n elementi tutti uguali all'unità, ogni altra relazione rimanendo inalterata. Occorrerà però prendere come calore del sistema $\mathbf{Z}\mathbf{R}_{-1}$, costo complessivo del lavoro necessario per ottenere il reddito $\mathbf{R}$. Tale nuovo concetto di calore sarà utile specialmente nella teoria keynesiana dell'occupazione.

Una trasformazione che porti uno stato A in uno B, corrispondenti a fissati valori di T e V, si rappresenta sul piano T, V con un arco di curva continua rettificabile che congiunge il punto A col punto B. Essa è reversibile, se l'arco $\widehat{AB}$ appartiene ad un ciclo reversibile, cioè equivalente ad un numero finito o ad un'infinità numerabile di cicli elementari (3). Esistono archi reversibili che congiungono due punti qualunque del piano T, V. L'insieme dei punti appartenenti a cicli reversibili è il *campo di reversibilità*: in esso, fissati A e B, può scriversi:

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = S\,(B) - S\,(A) \tag{4}$$

quale che sia l'arco che congiunge A con B. La forma differenziale lineare integranda di (4) si comporta come un differenziale esatto sul campo di reversibilità.

L'arco $\widehat{AB}$ sul quale si integra abbia per equazioni parametriche $T = T\,(t)\,,\ V = V\,(t)$: allora, integrando TdS per parti, si ha:

$$Q\,(t) = T\,(t)\,S\,(t) - \int_{t_0}^{t} S\,dT \tag{5}$$

(3) Costituiti da due archi di adiabatiche e di due di isoterme, oppure di quasi-adiabatiche e quasi-isoterme; cioè formati da tratti di adiabatiche e di isoterme lungo i quali, in totale, l'integrale (4) valga zero per una quasi-adiabatica, sia uguale alla proiezione sull'asse V, per una quasi-isoterma. Le due quasi-isoterme di un ciclo elementare devono elidersi nella integrazione. Un ciclo reversibile è incontrato da ogni adiabatica in non più di due punti distinti o coincidenti, o contiene un arco di adiabatica.

ove si è posto $S(t_0) = 0$, quindi $Q(t_0) = 0$. Questa (5) vale in tutto il piano nel quale è:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T}\frac{dQ}{dt} = V(t)\frac{d}{dt}\log Q(t). \tag{6}$$

La (5) dice che all'istante t il sistema possiede il calore totale $T(t)\,S(t)$ sviluppando internamente il calore $Q(t)$ ed esternamente quello $\int_{t_0}^{t} S\,dT$: si può perciò interpretare la (5) come *principio di conservazione dell'energia* calorifica del sistema economico [4].

Dalla (6) si ha che l'entropia $S(t)$ si mantiene positiva (e crescente) in tutto (t_0, t_1) allora e solo che il calore $Q(t)$ vi è crescente. In tal caso tutte le trasformazioni che avvengono nell'intervallo (t_0, t_1) sono sintropiche [5].

2. Sostituiamo, in quel che precede, $\mathbf{R}$ con $\mathbf{X}$ ponendo $E = \boldsymbol{p}\mathbf{X}_{-1} = \overline{T}V$, $d\overline{S} = \frac{dE}{\overline{T}}$. Invece di Q scriviamo E dicendo genericamente che è l'*energia* del sistema; $\overline{T}$ è il *potenziale* dell'energia, $\overline{S}(t)$ è l'entropia relativa alla produzione.

Poiché $\mathbf{R} \leqq \mathbf{X}$, si ha $\mathbf{Q} \leqq \mathbf{E}$, quindi $1 \leqq T \leqq \overline{T}$ e posto:

$$\frac{Q}{E} = \frac{T}{\overline{T}} = h(t) \leqq 1, \tag{7}$$

il piano T, V è portato in quello $\overline{T}, V$ prendendo $T = h\overline{T}$, $V = V$. In ogni istante t ciascuna adiabatica e ciascuna isoterma del piano T, V e di quello $\overline{T}, V$ vengono portate in curve degli stessi sistemi dell'altro piano; sicché, sovrapponendo i due piani, i campi di reversibilità coincidono in ogni istante. Si trova inoltre:

$$S(t) = \overline{S}(t) + \int_{t_0}^{t} V\frac{d}{d\tau}\log h(\tau)\,d\tau; \tag{8}$$

se $h(t)$ si mantiene non decrescente si ha dunque $S(t) \geqq \overline{S}(t)$. Avendo preso $Q(t_0) = 0$, si ha $V(t_0) = 0$ e può scriversi:

$$\int_{t_0}^{t} V\,d\log h = V(t)\log h(t) - \int_{t_0}^{t} \log h \cdot \frac{dV}{d\tau}\,d\tau \tag{9}$$

onde, poiché è sempre $\log h \leqq 0$, *se il valore monetario* [6] *della surproduzione si mantiene non crescente*, si ha, in tutto (t_0, t_1), $S(t) \leqq \overline{S}(t)$.

(4) In termodinamica l'integrale a secondo membro della (5), preso col segno opposto, si dice energia libera. Cfr. R. TOLMAN, *The principles of statistical Mecanics* (Oxford Univ. Press, 1950) § 12 del cap. XIII, p. 537; E. GUGGENHEIM, *Termodinamica* (Einaudi, Torino 1952) § 31 del cap. I, p. 55.

(5) Si verifica allora il terzo tipo fondamentale di G. PALOMBA, *L'espansione capitalistica* (Giannini, Napoli 1961). Appendice al cap. XVIII, pp. 197–198.

(6) Il valore monetario diventa quello intrinseco scambiando $\boldsymbol{p}$ con $\mathbf{Z}$ e può riferirsi il survalore anziché la surproduzione.

Orbene si ha:

$$\overline{S}(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{\mathbf{X}}{\overline{T}}\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}\right)_{-1}d\tau+\int_{t_0}^{t}\frac{\boldsymbol{p}}{\overline{T}}\left(\frac{d\mathbf{X}}{d\tau}\right)_{-1}d\tau \tag{10}$$

e poiché può porsi:

$$\left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)_{-1}=\mathfrak{B}\boldsymbol{p}_{-1}\quad ;\quad \left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)_{-1}=\mathfrak{C}\mathbf{X}_{-1} \tag{11}$$

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ essendo matrici opportune, si scrive:

$$\overline{S}(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{\mathbf{X}\mathfrak{C}\mathbf{X}_{-1}}{\overline{T}}d\tau+\int_{t_0}^{t}\frac{\boldsymbol{p}\mathfrak{B}\boldsymbol{p}_{-1}}{\overline{T}}d\tau . \tag{12}$$

Com'è noto, affinché le soluzioni del sistema differenziale (11) siano, come a noi occorre, vettori $\geqq 0$ quali che siano le loro determinazioni iniziali, è sufficiente che le matrici $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ siano entrambe non negative: se esse sono costanti, tale condizione sarà pure necessaria (7). Ne segue che in un mercato concorrenziale (in senso matematico) è sempre $\overline{S}(t)\geqq 0$.

3. La sintropicità del sistema economico, cioè la positività di $\overline{S}$, o quella di S, non basta per l'efficienza del sistema rispetto a qualsiasi fine. Questo assegnato, le produzioni dei singoli settori hanno *gradi di efficienza* positivi, negativi o zero che indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, costanti in ciascun intervallo di regolarità (8). Considerando la matrice diagonale $\boldsymbol{\alpha}=\text{diag.}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ e ponendo:

$$\alpha(t)\,\boldsymbol{p}\mathbf{X}_{-1}=\boldsymbol{p}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{X}_{-1} \tag{13}$$

diremo che $\alpha(t)$ è il fattore di efficienza della produzione complessiva: esso, in generale, non è costante in ogni intervallo di regolarità, ma si ha:

$$\min \operatorname{mod} \alpha_r \leqq \alpha(t) \leqq \max \operatorname{mod} \alpha_r . \tag{14}$$

Energia efficiente è quella data dalla (13), che corrisponde alle produzioni efficienti, cioè quella ottenuta sostituendo le matrici $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ con $\boldsymbol{\alpha}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}\boldsymbol{\alpha}$. Si può allora dire che la *sintropicità efficiente* della produzione si ha quando sono non negative $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ insieme ai gradi di efficienza.

L'efficienza può considerarsi pure pei redditi, per la surproduzione e pei survalori e le rispettive entropie–sintropie, cioè per le energie corrispondenti.

(7) La costanza sussiste per definizione in ogni intervallo di regolarità di un'epoca. L'arbitrarietà iniziale di $\mathbf{X}$ e $\boldsymbol{p}$ esprime la concorrenza matematica o tecnologica. I vettori non negativi $\mathbf{X}$ e $\boldsymbol{p}$ sono soggetti a restrizioni lineari che mutano il sistema (11) in uno non omogeneo con incognite i vettori surproduzione e survalore. La non negatività di $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ rimane sufficiente; se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ sono costanti è anche necessaria.

(8) Questa costanza è un'altra caratteristica che può distinguere un intervallo di regolarità da un altro.

Quando i gradi di efficienza sono non negativi, essi si interpretano come prezzi–ombra delle produzioni o come costi–ombra di forza–lavoro. Ciò si vede direttamente, ed è confermato in alcuni facili problemi di programmazione lineare coi loro duali considerati in altre nostre ricerche [9].

Pei gradi di efficienza, supposti non negativi, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ delle surproduzioni, considereremo la funzione lineare $z = \beta_1 S_1^* + \beta_2 S_2^* + \cdots + \beta_n S_n^*$ sottoposta ad una delle due restrizioni:

$$(15) \qquad \begin{cases} \mathbf{S}_{-1}^* \leqq \bar{\lambda}_{-1} = [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}_{-1} - \mathbf{Y}_{-1}^{**} \\ \mathbf{S}_{-1}^* \geqq \lambda_{-1} = [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}_{-1} - \boldsymbol{y}_{-1}^* \end{cases}$$

nelle quali si ha: $\mathbf{Y}^{**} \leqq \mathbf{Y}^* \leqq \mathrm{y}$, tutti tre vettori di consumi. Riesce: $\beta\bar{\lambda}_{-1} \geqq z \geqq \beta\lambda_{-1}$; $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \geqq 0$.

Dualmente si pone:

$$(16) \qquad \begin{cases} z^* = \bar{\lambda}\boldsymbol{p}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p} \geqq \beta \\ \bar{z}^* = \lambda\boldsymbol{p}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p} \leqq \beta \end{cases}$$

e risulta: $\max \bar{z}^* = \min z$; $\min z^* = \max z$.

(9) S. CHERUBINO, *Alcuni problemi di programmazione lineare*, in *Linear Economics*, p. II (Graduate School of Undustrial Studies, Athens 1960, pp. 240–250), § 1.