
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIOVANNI BATTISTA RIZZA

Strutture di Finsler sulle varietà quasi complesse

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 33 (1962), n.5, p. 271–275.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_271_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria differenziale. — *Strutture di Finsler sulle varietà quasi complesse.* Nota di GIOVANNI BATTISTA RIZZA, presentata (*) dal Corrisp. ENZO MARTINELLI.

1. L'esistenza di strutture di tipo diverso su di una medesima varietà dà sempre luogo a problemi di confronto. In questa Nota, che riassume alcuni risultati recenti (1), sono considerate, su di una varietà reale $\mathbb{C}^\infty$ di dimensione pari, strutture di Finsler e strutture quasi complesse.

Introdotta una opportuna definizione di *compatibilità* tra i due tipi di strutture, suggerita da considerazioni geometriche ($\mathbf{D}_1$, n. 4), è segnalato un procedimento che permette di pervenire sempre a strutture compatibili ($\mathbf{T}_1$, n. 5).

Le strutture di Finsler compatibili con una struttura quasi complessa della varietà appaiono una generalizzazione delle ordinarie strutture quasi hermitiane e pertanto possono dirsi *strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano* (n. 6).

Il teorema $\mathbf{T}_2$ del n. 8 dà una caratterizzazione geometrica di queste strutture, precisando la natura dei corpi convessi che esse definiscono in ogni spazio tangente.

Il teorema $\mathbf{T}_3$ del n. 9 segnala poi che, nell'ipotesi di compatibilità, le determinazioni metriche finsleriane dipendenti dalla considerazione di un elemento di appoggio risultano invarianti rispetto all'isomorfismo fondamentale definito dalla struttura quasi complessa.

Infine, ai nn. 7, 10 sono raccolte alcune osservazioni complementari.

2. Sia V_{2n} una varietà dotata di una *struttura quasi complessa*, indicata con c . Sia poi x un punto di V_{2n} , T_x lo spazio tangente nel punto x , J l'isomorfismo in T_x definito da c .

In virtù di una osservazione generale di E. Martinelli, la struttura quasi complessa c di V_{2n} determina canonicamente su ogni faccetta caratteristica h_ξ , individuata dai vettori $\xi, J\xi$ ($\xi \in T_x$), alcuni elementi metrici (2). Precisamente, se:

$$(1) \quad \vartheta = \xi \cos \varphi + J\xi \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

si può dire che ϑ e ξ hanno la stessa *lunghezza* e che φ è il loro *angolo*. Scelto arbitrariamente in h_ξ un vettore non nullo come vettore unitario, resta per-

(*) Nella seduta del 17 novembre 1962.

(1) Una parte dei risultati è stata esposta in una comunicazione al Congresso Internazionale di Matematica (Stoccolma, agosto 1962). Essi appariranno per esteso nel lavoro *Strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano*, in « Riv. Mat. Univ. Parma », al quale si rinvia per le dimostrazioni e la bibliografia completa.

(2) E. MARTINELLI, *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa*, Corso C.I.M.E. 1956 e *Sulle varietà a struttura complessa*, « Ann. di Mat. », 1957.

ciò definita la lunghezza L di un vettore qualunque della faccetta e l'angolo A di due vettori di questa; e si ha:

$$(2) \quad \begin{aligned} L(\vartheta) &= L(\xi) \\ \varphi &= A(\xi\vartheta). \end{aligned}$$

3. Si consideri ora su V_{2n} una *struttura di Finsler* f e sia $F(x, \xi)$ ($\xi \in T_x$) la funzione fondamentale (funzione metrica) e $\Phi(x, \xi): T_x \times T_x \rightarrow \mathbf{R}_+$ la forma $\mathbf{R}$ -bilinare simmetrica associata a $F(x, \xi)$.

Come è noto una struttura di questo tipo permette di introdurre per i vettori di T_x le nozioni di *lunghezza* l e di *angolo* a . Precisamente:

$$(3) \quad \begin{aligned} l^2(\rho) &= F^2(x, \rho) = \Phi(x, \rho)(\rho, \rho) \\ \cos a(\sigma, \tau) &= \frac{\Phi(x, \sigma)(\sigma, \tau)}{l(\sigma)l(\tau)} \end{aligned} \quad (\rho, \sigma, \tau \in T_x).$$

Convieni però notare che, in generale, *non* sussiste la relazione:

$$(4) \quad \cos a(\sigma\tau) = \cos a(\tau\sigma).$$

4. Dopo le premesse dei nn. 2 e 3 è ben naturale chiamare *compatibili* due strutture dei tipi considerati, *le quali inducano sulle faccette caratteristiche determinazioni metriche coerenti* nel senso della seguente definizione:

D₁ - La struttura di Finsler f di V_{2n} si dice *compatibile* con la struttura quasi complessa c di V_{2n} quando, in ogni punto $x \in V_{2n}$, sono soddisfatte le condizioni:

$$(5) \quad L(\zeta) = L(\eta) \Leftrightarrow l(\zeta) = l(\eta)$$

$$(6) \quad \cos A(\zeta\eta) = \frac{1}{2} [\cos a(\zeta\eta) + \cos a(\eta\zeta)]$$

per ogni coppia di vettori ζ, η appartenenti ad una arbitraria faccetta caratteristica h_ξ .

Previa opportuna scelta del vettore unitario in ogni faccetta caratteristica, la condizione (5) diviene semplicemente:

$$(7) \quad L(\xi) = l(\xi) \quad (\xi \in T_x)$$

La condizione (6) appare del tutto naturale dopo l'osservazione alla fine del n. 3.

5. Denotato con $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le strutture di Finsler di V_{2n} e con $\mathcal{F}_H^c$ il sottoinsieme di quelle compatibili con la struttura quasi complessa c di V_{2n} (n. 4), sussiste il *teorema*:

T₁ - Su di una varietà V_{2n} dotata di una struttura quasi complessa c , esiste una applicazione idempotente (proiezione):

$$(8) \quad \omega^c : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_H^c.$$

In altri termini, a partire da una qualunque struttura di Finsler di V_{2n} è possibile costruirne una nuova compatibile con la struttura quasi complessa di V_{2n} considerata.

Per la dimostrazione di T_1 basta rilevare che, se $f \in \mathcal{F}$ ed $F(x, \xi)$ è la relativa funzione fondamentale (n. 3), la funzione positiva:

$$(9) \quad F_H^c(x, \xi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F^2(x, \vartheta) d\vartheta}$$

con ϑ definito dalla (1), dà luogo ad una nuova struttura di Finsler f_H^c che appartiene ad $\mathcal{F}_H^c$. È poi immediato che $\omega^c \circ \omega^c = \omega^c$.

6. Si consideri il caso particolare delle *strutture di Riemann*. Esse sono precisamente le strutture di Finsler con forma $\mathbf{R}$ -bilineare simmetrica $\Phi(x, \xi)$ indipendente dal vettore ξ .

Le condizioni di compatibilità del n. 4 si riducono ora a forma più semplice e, come ha mostrato E. Martinelli nel 1956 ⁽³⁾, permettono di caratterizzare nell'insieme $\mathcal{R}$ delle strutture di Riemann il sottoinsieme $\mathcal{H}^c$ delle *strutture quasi hermitiane* associate alla struttura c di V_{2n} .

Indicato con C l'insieme di tutte le strutture quasi complesse di V_{2n} , l'insieme $\mathcal{F}_H = \bigcup_{c \in C} \mathcal{F}_H^c$ appare dunque una naturale generalizzazione dell'insieme $\mathcal{H} = \bigcup_{c \in C} \mathcal{H}^c$ delle strutture quasi hermitiane di V_{2n} . Gli elementi di $\mathcal{F}_H$, cioè le strutture di Finsler compatibili con una qualche struttura quasi complessa di V_{2n} , si diranno quindi *strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano*.

Dal risultato di Martinelli segue poi immediatamente che l'applicazione ω^c di cui al teor. T_1 muta $\mathcal{R}$ in $\mathcal{H}^c$. Il teor. T_1 generalizza quindi il noto risultato che afferma la possibilità, su di una V_{2n} dotata di una struttura quasi complessa c , di ottenere una struttura quasi hermitiana, associata a c , a partire da una qualunque struttura di Riemann ⁽⁴⁾.

7. Sulle condizioni di compatibilità (n. 4) e sulle strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano (n. 6) sono interessanti alcune *osservazioni*.

O_1 - La condizione (5) implica la condizione (6).

O_2 - La condizione (5) è equivalente alla:

$$(10) \quad F(x, \vartheta) = F(x, \xi)$$

con $x \in V_{2n}$, $\xi \in T_x$, ϑ dato dalla (1).

Per $\vartheta = J\xi$ la (10) diviene:

$$(11) \quad F(x, J\xi) = F(x, \xi)$$

con $x \in V_{2n}$, $\xi \in T_x$.

(3) Ved. lavori cit. in ⁽²⁾.

(4) Ved. per esempio B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*, Corso C.I.M.E. 1956.

Dalla (10) per $\varphi = \pi$ deriva poi:

O₃ - *Le strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano sono necessariamente simmetriche; cioè:*

$$F(x, -\xi) = F(x, \xi)$$

con $x \in V_{2n}$, $\xi \in T_x$.

Nel caso particolare delle strutture di Riemann, le condizioni di compatibilità (5) e (6) del n. 4 risultano equivalenti. Inoltre, la condizione (11) implica la (10) (e quindi le (5), (6) in virtù di **O₁**, **O₂**); ciò però *non* è più vero, in generale, per le strutture di Finsler.

8. Una caratterizzazione geometrica delle strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano (n. 6) su di una varietà V_{2n} dotata di una struttura quasi complessa c , si ottiene nel modo seguente.

Si considerino come strutture ausiliarie su V_{2n} le strutture di $\mathcal{H}^c$ (n. 6), cioè le strutture quasi hermitiane in accordo con la struttura c ⁽⁵⁾.

E' noto poi che, nello spazio tangente T_x ($x \in V_{2n}$), ora riguardato come spazio affine di centro O , l'equazione:

$$F(x, \xi) = 1$$

determinata da una struttura di Finsler f di V_{2n} , rappresenta una ipersuperficie (indicatrice), contorno di un *corpo convesso* B_x .

Ciò premesso, sussiste il *teorema*:

T₂ - *Condizione necessaria e sufficiente affinché la struttura di Finsler f di una V_{2n} dotata di struttura quasi complessa c , sia di tipo quasi hermitiano (relativamente a c) è che, per ogni $x \in V_{2n}$, il corpo convesso B_x , definito da f , sia un corpo circolare di Carathéodory di centro O (per ogni struttura quasi hermitiana di V_{2n} associata a c).*

In altri termini la condizione è che le sezioni di B_x con i piani $O, \xi, J\xi$ ($\xi \in T_x$) (piani caratteristici per O) siano circolari di centro O , nella metrica definita da una qualunque struttura di $\mathcal{H}^c$.

9. Come è noto, per ottenere determinazioni metriche a partire da una struttura di Finsler, si può procedere in modo diverso da quello indicato al n. 3, facendo intervenire sistematicamente gli *elementi lineari* della varietà (*elementi di appoggio*).

Precisamente, con le notazioni del n. 3 e con riferimento all'elemento lineare orientato, individuato da (x, ξ) con $x \in V_{2n}$ e $\xi \in T_x$, le nozioni di *lunghezza* e di *angolo* per i vettori di T_x sono definite dalle uguaglianze:

$$(12) \quad \begin{aligned} \lambda_{\xi}^2(\rho) &= \Phi(x, \xi)(\rho, \rho) \\ \cos \alpha_{\xi}(\sigma\tau) &= \frac{\Phi(x, \xi)(\sigma, \tau)}{\lambda_{\xi}(\sigma)\lambda_{\xi}(\tau)} \end{aligned} \quad (\rho, \sigma, \tau \in T_x).$$

(5) Il teorema di immersione di Whitney e l'osservazione alla fine del n. 6 assicurano che $\mathcal{H}^c$ non è vuoto.

Per $\xi = \rho$, $\lambda_{\xi}(\rho)$ si riduce a $l(\rho)$ (n. 3) e, a differenza di $\cos \alpha(\sigma\tau)$ (n. 3), la funzione $\cos \alpha_{\xi}(\sigma\tau)$ è simmetrica nei vettori σ, τ .

Ciò premesso, con riferimento alla totalità $\mathfrak{N}_f$ delle determinazioni metriche, cui si perviene nel modo ora accennato a partire da una struttura di Finsler f , sussiste il *teorema*:

T₃ - Se f è una struttura di Finsler di tipo hermitiano, associata ad una struttura quasi complessa c di V_{2n} , risulta:

$$[\mathfrak{N}_f, J] = \mathfrak{N}_f J - J\mathfrak{N}_f = 0;$$

cioè, ogni determinazione metrica di $\mathfrak{N}_f$ è invariante rispetto all'isomorfismo J , definito dalla struttura c della varietà.

La dimostrazione di **T₃** consiste essenzialmente nello stabilire la relazione;

$$(13) \quad \Phi(x, \xi)(\sigma, \tau) = \Phi(x, J\xi)(J\sigma, J\tau)$$

con $x \in V_{2n}$ e $\xi, \sigma, \tau \in T_x$.

10. Si consideri ora la condizione:

C₁ - Per ogni $\xi \in T_x$ ($x \in V_{2n}$) la forma $\Phi(x, \xi)$, definita dalla struttura di Finsler f , sia una forma **R**-bilinare simmetrica associata ad una forma hermitiana (relativa alla struttura quasi complessa c di V_{2n}).

Nel caso delle strutture di Riemann ($f \in \mathfrak{R}$) la condizione di invarianza (13) del n. 9 implica la condizione **C₁** (anzi le tre condizioni (13), **C₁**, $f \in \mathfrak{H}$ risultano equivalenti). Questo però non è più vero, in generale, nel caso delle strutture di Finsler ($f \in \mathfrak{F}$) e neppure in quello particolare delle strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano, associate alla struttura c di V_{2n} ($f \in \mathfrak{F}_H^c$).

Conviene infine segnalare l'osservazione:

O₄ - Per le strutture di $\mathfrak{F}_H^c$ soddisfacenti alla condizione **C₁** la funzione $\cos \alpha(\sigma\tau)$ (n. 3) è simmetrica sulle faccette caratteristiche; sussiste cioè la (4) per ogni coppia di vettori $\sigma, \tau \in h_{\xi}$ ($\xi \in T_x, x \in V_{2n}$).