
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CARMELO MAMMANA

Corrispondenze cremoniane e loro jacobiane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 33 (1962), n.5, p. 260–270.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_260_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Corrispondenze cremoniane e loro jacobiane* (*).
 Nota di CARMELO MAMMANA, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

1. In questo lavoro studiamo alcune proprietà delle corrispondenze cremoniane fra spazi proiettivi complessi ad $r \geq 2$ dimensioni, inerenti al modo come sono composte le jacobiane dei sistemi omaloidici da esse definiti in tali spazi. Dette proprietà vengono qui dimostrate con ragionamenti algebrici molto semplici, seguendo un metodo già da noi adoperato in una precedente ricerca (1). Ecco ora in breve il contenuto del lavoro.

Nel n. 2 ricordiamo teoremi e definizioni che occorrono in seguito.

Nel n. 3 dimostriamo algebricamente un risultato ottenuto da O. H. Keller (2) per altra via (vedi n. 2). Nei nn. 4 e 5 dimostriamo che, se la jacobiana di una corrispondenza cremoniana T fra due spazi proiettivi, S_r ed S'_r , è la potenza di una forma lineare, allora, mentre per $S_r \not\equiv S'_r$ la T è intera, per $S_r \equiv S'_r$ la T o è intera oppure è il prodotto di una corrispondenza cremoniana intera per un'omologia armonica.

Nel n. 6 osserviamo che una corrispondenza razionale $\kappa'_i = F_i(\kappa)$ con la jacobiana potenza di una forma lineare è birazionale se e soltanto se nel sistema lineare $\sum_{i=0}^r \lambda_i F_i(\kappa) = 0$ esiste un'ipersuperficie spezzata in n iperpiani coincidenti. Proviamo inoltre che, per $n = 2$, siffatte corrispondenze riescono tutte birazionali. Nel n. 7 dimostriamo che, se $\varphi(\kappa) \varphi_0^0(\kappa) = 0$ e $\varphi(\kappa) \varphi_1^0(\kappa) = 0$ sono due ipersuperficie distinte di un sistema lineare omaloidico, allora è necessariamente $\rho = 1$. Questo risultato viene posto sotto forma equivalente ma più espressiva nel n. 7, b.

Dopo avere osservato che le componenti irriducibili di un'ipersuperficie qualsiasi di un sistema lineare omaloidico, sono anche tutte, tranne al più una, componenti della jacobiana del sistema (n. 8), consideriamo quelle eventuali ipersuperficie del sistema le cui componenti irriducibili sono *tutte* componenti irriducibili della jacobiana del sistema stesso. Queste vengono qui denominate ipersuperficie a componenti tutte eccezionali o, più semplicemente, *totalmente eccezionali* (t. e.); risulterà poi (fine n. 9) che ogni sistema omaloidico d'ordine $n \geq 2$ possiede al più un numero finito d'ipersuperficie t. e.. Dette $\kappa'_i = f_i(\kappa)$ ($i = 0, 1, \dots, r$) le equazioni di una corrispondenza cremoniana T di ordine n , indichiamo con Σ_r il sistema lineare omaloidico $\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(\kappa) = 0$; e sia $J(\kappa) = K_1^{\tau_1}(\kappa) K_2^{\tau_2}(\kappa) \dots K_t^{\tau_t}(\kappa)$ una decomposizione in fattori primi della forma jacobiana $J(\kappa)$ di T .

Nel n. 9 dimostriamo che le ipersuperficie t. e. di Σ_r sono tante quante sono le componenti lineari distinte della jacobiana di T^{-1} . Inoltre (n. 10), se in Σ_r esistono s ipersuperficie t. e.

$$f^{(i)}(\kappa) = b_i K_1^{\rho_{i1}}(\kappa) K_2^{\rho_{i2}}(\kappa) \dots K_t^{\rho_{it}}(\kappa) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s; \rho_{ji} \geq 0),$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 28 e in collaborazione col Gruppo di ricerca n. 17 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1961-62.

(**) Nella seduta del 17 novembre 1962.

(1) C. MAMMANA, *Su certe ipersuperficie, analoghe alle jacobiane, legate ad una corrispondenza cremoniana*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. XXVII, fasc. 6 (1959).

(2) O. H. KELLER, *Ganze Cremona Transformationen*, « Monatsh. f. Math. u. Phys. », vol. 47 (1939).

allora è $s \leq t$ e la matrice $[p_{ji}]$ degli esponenti è formata con s colonne distinte di una matrice quadrata P (di ordine t) ad elementi interi non negativi ed a determinante $\pm n$. In particolare dunque, quando $s = t$, la matrice $[p_{ji}]$ coincide con la P onde il suo determinante vale $\pm n$.

Infine, nel n. II, proviamo con esempi che le ipersuperficie t. e. di un sistema lineare omaloidico possono risultare linearmente dipendenti fra loro e che il numero di tali ipersuperficie può non essere uguale a quello delle ipersuperficie t. e. del sistema lineare omaloidico definito dalla corrispondenza inversa.

2. Siano rispettivamente

$$(T) \quad x'_i = f_i(x) \quad ; \quad (T^{-1}) \quad x_i = g_i(x') \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r)$$

le equazioni di una corrispondenza cremoniana T fra due spazi proiettivi S_r ed S'_r e della sua inversa T^{-1} ; le $f_i(x)$ sono quindi forme di un certo grado n che possono suporsi prime fra di loro e, del pari le $g_i(x')$ sono forme di un certo grado m prime fra di loro.

Nel seguito indicheremo sempre con $K(x)$ ed $H(x')$ le forme di grado $nm - 1$ definite dalle identità evidenti:

$$(I) \quad g_i(f) = K(x) x_i \quad ; \quad f_i(g) = H(x') x'_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r).$$

Indicheremo inoltre con $J(x)$ ed $J'(x')$ le forme jacobiane

$$J(x) = \frac{\partial(f_0, f_1, \dots, f_r)}{\partial(x_0, x_1, \dots, x_r)} \quad ; \quad J'(x') = \frac{\partial(g_0, g_1, \dots, g_r)}{\partial(x'_0, x'_1, \dots, x'_r)},$$

e con t il numero delle componenti irriducibili distinte di $J(x)$.

Ricordiamo ⁽³⁾ le seguenti proprietà, di cui usufruiremo in seguito.

a) Valgono le identità

$$H(f) = K^n(x) \quad ; \quad K(g) = H^m(x').$$

b) Le forme $K(x)$ ed $J(x)$, e così pure similmente le $H(x')$ ed $J'(x')$, hanno le stesse componenti irriducibili distinte. Le forme $K(x)$, $J(x)$, $H(x')$, $J'(x')$ hanno lo stesso numero, t , di componenti irriducibili distinte.

Inoltre, se

$$K(x) = K_1^{v_1}(x) K_2^{v_2}(x) \dots K_t^{v_t}(x) \quad ; \quad H(x') = H_1^{v'_1}(x') H_2^{v'_2}(x') \dots H_t^{v'_t}(x')$$

sono decomposizioni in fattori primi delle forme $K(x)$ ed $H(x')$, si ha che:

c) Il M.C.D. dei gradi delle forme $K_1(x)$, $K_2(x)$, $\dots$, $K_t(x)$ è uguale al M.C.D. dei gradi delle forme $H_1(x')$, $H_2(x')$, $\dots$, $H_t(x')$.

d) Si ha

$$H_j(f) = a_j K_1^{p_{1j}}(x) K_2^{p_{2j}}(x) \dots K_t^{p_{tj}}(x) \quad ; \quad K_j(g) = b_j H_1^{q_{1j}}(x') H_2^{q_{2j}}(x') \dots H_t^{q_{tj}}(x') \\ (j = 1, 2, \dots, t),$$

con a_j, b_j costanti non nulle e p_{ij}, q_{ij} interi non negativi.

e) La matrice $P = [p_{ij}]$ ha determinante $\pm n$; la matrice $Q = [q_{ij}]$ ha determinante $\pm m$.

(3) C. MAMMANA, loc. cit. in ⁽¹⁾; O.H. KELLER, loc. cit. in ⁽²⁾; B. SEGRE, *Corrispondenze birazionali e topologia di varietà algebriche*; « Annali di Matematica », ser. IV, tomo XLIII (1957).

È ben noto che una corrispondenza cremoniana T fra due spazi proiettivi *distinti* S_r ed S'_r dicesi *intera* se, con opportuna scelta dei sistemi di riferimento in S_r ed in S'_r , le sue equazioni e quelle della inversa T^{-1} possono venir scritte nella forma:

$$(2) \quad (T) \begin{cases} x'_0 = x''_0 \\ x'_i = f_i(x) \end{cases} \quad (T^{-1}) \begin{cases} x_0 = x'_0{}^m \\ x_i = g_i(x') \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Se gli spazi S_r ed S'_r sono *sovrapposti*, la T dicesi *intera* quando, con opportuna scelta del riferimento in S_r , le sue equazioni possono venire scritte nella forma (2).

Dalla definizione segue subito che le omografie fra spazi proiettivi, distinti o sovrapposti, sono corrispondenze cremoniane intere. Inoltre, la jacobiana di una corrispondenza cremoniana intera T è potenza (ad esponente positivo) di una forma lineare, oppure (se T è un'omografia) è una costante non nulla.

Ricordiamo infine il seguente notevole teorema.

f) Se le equazioni di una corrispondenza *razionale* T , fra due spazi proiettivi S_r ed S'_r , si possono scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} x'_0 &= x''_0 \\ x'_i &= F_i(x) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

e se risulta:

$$\frac{\partial (x''_0, F_1, \dots, F_r)}{\partial (x_0, x_1, \dots, x_r)} = a x''_0{}^{(r+1)(n-1)} \quad (\text{con } a \text{ costante non nulla}),$$

allora la T è una corrispondenza cremoniana intera.

Per $r = 2$ il risultato è stato dimostrato da W. Engel ⁽⁴⁾ nel 1955, per via algebrica. Nel caso generale $r \geq 2$, esso è stato dimostrato da B. Segre ⁽⁵⁾ nel 1956, per via algebro-trascendente, provando prima che la corrispondenza è birazionale e poi che è intera ⁽⁶⁾. Di questa seconda parte, nel n. 3, daremo una dimostrazione algebrica.

(4) W. ENGEL, *Ein satz über Ganze Cremona Transformationen der Ebene*, «Math. Ann.», vol. 130 (1955).

(5) B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. II, Roma, Docet, (1956), pp. 393-399. Una dimostrazione topologica dello stesso teorema trovasi in B. SEGRE, *Variatione continua ed omotopia in geometria algebrica*, «Annali di Matematica», ser. IV, tomo L (1960). In questo lavoro l'autore trova il detto teorema come caso particolare di certe proprietà delle corrispondenze algebriche fra varietà algebriche.

(6) Sulle corrispondenze cremoniane intere, oltre i lavori già citati, vedasi: W. ENGEL, *Ganze Cremona Transformationen von Primzahlgrad in der Ebene*, «Math. Ann.», vol. 136 (1958); A. GUTHWIRTH, *An inequality for pencils of plane curves*, «Proceed. of the A.M.S.», vol. 12 (1961); H.W.E. JUNG, *Über Ganze birationale Transformationen der Ebene*, «Journal für Reine u. Ang. Math.», vol. 184 (1942); B. SEGRE, *Corrispondenze di Möbius e trasformazioni cremoniane intere*, «Atti Acc. Scienze di Torino», vol. 91 (1956-57); M. ROSATI, *Classificazione proiettiva delle trasformazioni cremoniane intere fra due piani*, «Rendiconti di Matematica», vol. 21 (1962).

3. Dimostriamo anzitutto, per via algebrica, la seguente nota proprietà ⁽⁷⁾.

Se una corrispondenza cremoniana T fra due spazi proiettivi S_r ed S'_r (distinti o sovrapposti) ha equazioni del tipo

$$(T) \quad x'_0 = x''_0, \quad x'_i = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, r; n \geq 2),$$

e se la jacobiana J(x) di T ha una sola componente irriducibile, allora le equazioni dell'inversa T^{-1} sono del tipo

$$(T^{-1}) \quad x_0 = x'_0{}^m, \quad x_i = g_i(x') \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

e quindi la T è intera.

Infatti, l'iperpiano $x_0 = 0$ è una componente irriducibile dell'ipersuperficie $J(x) = 0$, in quanto $n \geq 2$; e poiché $J(x)$ ha per ipotesi una sola componente irriducibile, si ha $J(x) = ax_0^{(r+1)(n-1)}$, con a costante non nulla.

Siano $x_j = g_j(x')$ ($j = 0, 1, 2, \dots, r$) le equazioni di T^{-1} . Per le (1) si ha $g_0^n(x') = H(x')x'_0$, e quindi $g_0(x')$ è divisibile per x'_0 ed $H(x')$ è divisibile per $x'_0{}^{n-1}$. Poiché $n-1 \geq 1$ ed $H(x')$ ha una sola componente irriducibile come $J(x)$ (n. 2, b), si ha $H(x') = b x'_0{}^{nm-1}$ con b costante non nulla, e quindi $g_0(x') = c x'_0{}^m$, onde segue subito la proprietà enunciata.

4. Supponiamo ora che gli spazi proiettivi S_r ed S'_r siano *distinti*, e stabiliamo il seguente risultato.

Se la jacobiana J(x) di una corrispondenza cremoniana T fra due spazi proiettivi distinti S_r ed S'_r è la potenza di una forma lineare, allora T è intera.

Infatti, poiché $J(x)$ è potenza di una forma lineare, $\varphi(x)$, per il n. 2, b), c) anche la jacobiana $J'(x')$ di T^{-1} è potenza di una forma lineare, $\psi(x')$. Scegliamo i riferimenti: in S_r in modo che l'iperpiano $\varphi(x) = 0$ sia l'iperpiano $x_0 = 0$, ed in S'_r in modo che l'iperpiano $\psi(x') = 0$ sia l'iperpiano $x'_0 = 0$. Dopo di ciò, siano

$$(T) \quad x'_i = f_i(x) \quad ; \quad (T^{-1}) \quad x_i = g_i(x') \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

le equazioni di T e di T^{-1} , con le $f_i(x)$ forme di grado $n \geq 2$ prime fra di loro e le $g_i(x')$ forme di grado m prime fra di loro. Per le ipotesi fatte, si ha

$$J(x) = ax_0^{(r+1)(n-1)} \quad ; \quad J'(x') = a' x'_0{}^{(r+1)(m-1)},$$

con a, a' costanti non nulle. Ne segue, per il n. 2, b) che è

$$K(x) = bx_0{}^{nm-1} \quad ; \quad H(x') = b' x'_0{}^{nm-1},$$

con b, b' costanti non nulle. Da qui, in base alle identità $H(f) = K^n(x)$, $K(g) = H^m(x')$, segue

$$b' f_0{}^{nm-1}(x) = b^n x_0{}^{n(nm-1)} \quad ; \quad b g_0{}^{nm-1}(x') = b'^m x'_0{}^{m(nm-1)},$$

(7) O. H. KELLER, loc. cit. in (2); B. SEGREGÈ, *Forme differenziali ecc.*, citato in (4).

e quindi

$$f_0(x) = cx_0^n \quad ; \quad g_0(x') = c' x_0'^m,$$

con c, c' costanti non nulle. Pertanto la T è intera.

5. Nel teorema del n. 4, la condizione ammessa che gli spazi S_r ed S'_r siano distinti è necessaria (per $n \geq 2$), come mostra ad esempio la corrispondenza

$$x'_0 = x_1^2 \quad , \quad x'_1 = x_0 x_1 \quad , \quad x'_2 = x_1 x_2 + x_0^2$$

fra piani proiettivi *sovrapposti*, la quale è cremoniana, ha la jacobiana $J(x) = -2x_1^3$ e non è intera. Nel caso di spazi proiettivi sovrapposti, si ha però che:

Se la jacobiana $J(x)$ di una corrispondenza cremoniana T fra due spazi proiettivi sovrapposti S_r ed S'_r è potenza di una forma lineare, $\varphi(x)$, allora T è intera, oppure è il prodotto di una corrispondenza cremoniana intera per un'omologia armonica.

Infatti, poiché $J(x)$ è potenza della $\varphi(x)$, per il n. 2, b), c) anche la jacobiana $J'(x')$ di T^{-1} è potenza di una forma lineare, $\psi(x')$. Gli iperpiani $\varphi(x) = 0$ e $\psi(x') = 0$ possono coincidere oppure no. Se coincidono, scegliendo il riferimento in $S_r \equiv S'_r$ in modo che l'iperpiano $\varphi(x) = 0$ sia l'iperpiano $x_0 = 0$, e ragionando come nel n. 4, si prova che T è intera.

Se non coincidono, scegliamo il riferimento in modo che l'iperpiano $\varphi(x) = 0$ sia l'iperpiano $x_0 = 0$ e l'iperpiano $\psi(x') = 0$ sia l'iperpiano $x_1 = 0$; e siano

$$(T) \quad x_i = f_i(x) \quad ; \quad (T^{-1}) \quad x_i = g_i(x') \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r)$$

le equazioni di T e di T^{-1} , con $f_i(x)$ forme di grado $n \geq 2$ prime fra loro e $g_i(x')$ forme di grado m prime fra loro. Per le ipotesi fatte, si ha

$$J(x) = ax_0^{(r+1)(n-1)} \quad ; \quad J'(x') = a' x_1'^{(r+1)(m-1)}$$

$$K(x) = bx_0^{mn-1} \quad ; \quad H(x') = b' x_1'^{mn-1},$$

con a, a', b, b' , costanti non nulle. Da qui, in base alle identità $H(f) = K^n(x)$ e $K(g) = H^m(x')$, segue

$$b' f_1^{mn-1}(x) = b^n x_0^{n(mn-1)} \quad ; \quad b g_0^{mn-1} = b' m x_1'^{m(mn-1)},$$

e quindi

$$f_1(x) = cx_0^n \quad ; \quad g_0(x') = c' x_1'^m,$$

con c, c' costanti non nulle. Pertanto le equazioni di T e T^{-1} risultano del tipo:

$$(T) \quad \begin{cases} x'_0 = f_0(x) \\ x'_1 = cx_0^n \\ x'_i = f_i(x) \end{cases} \quad (T^{-1}) \quad \begin{cases} x_0 = c' x_1'^m \\ x_1 = g_1(x') \\ x_i = g_i(x') \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, r).$$

Si verifica ora subito che è $T = UV$, dove U e V sono le corrispondenze definite dalle equazioni

$$(U) \begin{cases} x''_0 = c x''_0 \\ x''_1 = f_0(x) \\ x''_i = f_i(x) \end{cases} \quad (V) \begin{cases} x'_0 = x''_1 \\ x'_1 = x''_0 \\ x'_i = x''_i \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, r).$$

D'altro canto U è una corrispondenza cremoniana intera, poiché da $T = UV$ segue $U^{-1} = VT^{-1}$ e quindi $x_0 = c' x''^m_0$; e V è l'omologia armonica che ha per centro il punto $(1, -1, 0, \dots, 0)$ e per asse l'iperpiano $x_0 = x_1$.

6. Sia

$$(3) \quad x'_i = F_i(x_0, x_1, \dots, x_r) \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

una corrispondenza *razionale* fra uno spazio proiettivo S_r ed uno spazio proiettivo S'_r , con le F_i forme di grado $n \geq 2$ (prime fra di loro). Dal teorema di B. Segre ricordato nel n. 2, f) e da quello dimostrato nel n. 4 segue subito che:

Una corrispondenza razionale (3) la cui jacobiana sia potenza di una forma lineare risulta birazionale se e soltanto se nel sistema lineare $\sum_{i=0}^r \lambda_i F_i(x) = 0$ esiste un'ipersuperficie ridotta ad un iperpiano da contarsi n volte.

Infatti, se la corrispondenza (3) è birazionale, allora, poiché la sua jacobiana è per ipotesi potenza di una forma lineare, nel sistema lineare $\sum_{i=0}^r \lambda_i F_i(x) = 0$ esiste un'ipersuperficie spezzata in n iperpiani coincidenti in forza del n. 4.

Viceversa, se nel sistema lineare $\sum_{i=0}^r \lambda_i F_i(x) = 0$ esiste un'ipersuperficie spezzata in n iperpiani coincidenti, allora, poiché per ipotesi la jacobiana è potenza di una forma lineare, dal citato teorema di B. Segre si trae che la corrispondenza (3) è birazionale.

Per $n = 2$ si ha più precisamente che:

Le corrispondenze razionali di ordine $n = 2$ la cui jacobiana sia potenza di una forma lineare sono tutte birazionali.

Consideriamo infatti una corrispondenza razionale (3), d'ordine $n = 2$, la cui jacobiana sia potenza di una forma lineare. Indichiamo con T questa corrispondenza e denotiamo con Σ_r il sistema lineare di quadriche

$\sum_{i=0}^r \lambda_i F_i(x) = 0$; quest'ultimo non può essere composto con un'involuzione di varietà di dimensione positiva, altrimenti la sua jacobiana sarebbe identicamente nulla ⁽⁸⁾. Pertanto Σ_r ha dimensione r e può soltanto essere sem-

(8) E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Messina, Principato, 1923, pag. 278.

plice (cioè omaloidico) oppure composto con un'involuzione di gruppi di $h \geq 2$ punti. Supponiamo per assurdo Σ_r composto con un'involuzione di gruppi di $h \geq 2$ punti. Indichiamo con P un generico punto di S_r e con P_1 uno dei rimanenti punti del gruppo individuato da P . Le ∞^{r-1} quadriche di Σ_r che passano per P passano anche per P_1 e la generica di esse non contiene la retta PP_1 . Ne segue che le quadriche di Σ_r che contengono la retta PP_1 formano un sistema lineare di dimensione $r-2$, onde il sistema lineare Σ_r sega sulla retta PP_1 una g_2^1 priva di punti fissi. Questa g_2^1 ha due punti doppi distinti, M ed N , separanti armonicamente la coppia PP_1 . Poiché le ∞^{r-1} quadriche di Σ_r che passano per M sono tangenti in M alla retta PP_1 , v'è almeno una quadrica di Σ_r avente in M un punto doppio, cioè M sta sulla jacobiana di Σ_r . Analogamente si vede che N sta sulla jacobiana di Σ_r . Ne segue che la retta PP_1 ha a comune con la jacobiana di Σ_r almeno due punti distinti e non giace su di essa. Ciò è assurdo, poiché la jacobiana di Σ_r è per ipotesi un iperpiano $(r+1)$ -uplo, onde l'asserto.

7. Dimostriamo che:

a) Se

$$\varphi(x) \varphi_0^0(x) = 0 \quad , \quad \varphi(x) \varphi_1^0(x) = 0$$

sono due ipersuperficie distinte di un sistema lineare omaloidico, allora è necessariamente $\rho = 1$ ⁽⁹⁾.

Infatti, siano

$$(T) \quad \begin{cases} x'_0 = \varphi(x) \varphi_0^0(x) \\ x'_1 = \varphi(x) \varphi_1^0(x) \\ x'_i = f_i(x) \end{cases} \quad (T^{-1}) \quad \begin{cases} x_0 = g_0(x') \\ x_i = g_i(x') \quad (i = 2, 3, \dots, r) \\ x_i = g_i(x') \end{cases}$$

le equazioni di una corrispondenza cremoniana T e della sua inversa T^{-1} . Poniamo

$$\varphi(g) = x_0'^a \psi(x') \quad , \quad \varphi_0(g) = x_0'^b \psi_0(x') \quad , \quad \varphi_1(g) = x_0'^c \psi_1(x'),$$

con a, b, c , interi non negativi tali che ciascuna delle forme $\psi(x'), \psi_0(x'), \psi_1(x')$ sia non divisibile per x_0' . Dalle identità (1) seguono le

$$\varphi(g) \varphi_0^0(g) = H(x') x_0' \quad , \quad \varphi(g) \varphi_1^0(g) = H(x') x_1'$$

e quindi le

$$x_0'^{a+b} \psi(x') \psi_0^0(x') = H(x') x_0' \quad , \quad x_0'^{a+c} \psi(x') \psi_1^0(x') = H(x') x_1'.$$

E poiché ciascuna delle forme $\psi(x') \psi_0^0(x')$ e $\psi(x') \psi_1^0(x')$ è non divisibile per x_0' , si ha $a + b\rho - 1 = a + c\rho$, cioè $(b - c)\rho = 1$, e quindi $\rho = 1$.

Il teorema testè dimostrato equivale al seguente.

(9) Le forme $\varphi(x), \varphi_0(x), \varphi_1(x)$ possono essere riducibili o irriducibili, e la $\varphi(x)$ può anche essere di grado zero, cioè una costante non nulla.

b) Siano $f_0(x) = 0$ ed $f_1(x) = 0$ due qualunque ipersuperficie distinte di un sistema lineare omaloidico; detto $F(x)$ il M.C.D. delle due forme $f_0(x)$ ed $f_1(x)$, sia poi $F_0(x) = f_0(x) : F(x)$, $F_1(x) = f_1(x) : F(x)$. Se

$$F_0(x) = \varphi_1^{n_1}(x) \varphi_2^{n_2}(x) \cdots \varphi_s^{n_s}(x) \quad , \quad F_1(x) = \psi_1^{m_1}(x) \psi_2^{m_2}(x) \cdots \psi_u^{m_u}(x)$$

sono decomposizioni in fattori primi delle forme $F_0(x)$ ed $F_1(x)$, allora gli esponenti

$$n_1, n_2, \dots, n_s \quad , \quad m_1, m_2, \dots, m_u$$

risultano primi tra loro.

Infatti, da a) segue b) ove si assuma $\varphi(x) = F(x)$. E da b) segue a) in quanto detto $\vartheta(x)$ il M.C.D. delle $\varphi_0(x)$ e $\varphi_1(x)$, si ha che il M.C.D. delle $\varphi(x) \varphi_0^0(x)$ e $\varphi(x) \varphi_1^0(x)$ è $F(x) = \varphi(x) \vartheta^2(x)$; posto $\varphi_0 = \vartheta \varphi_0'$, $\varphi_1 = \vartheta \varphi_1'$, si ha dunque $f_0 = F \varphi_0^0$, $f_1 = F \varphi_1^0$, sicché in virtù di b) segue $\rho = 1$.

Dal teorema a) si traggono subito le seguenti conseguenze:

c) In un sistema lineare omaloidico di ipersuperficie di ordine $n \geq 2$ c'è al più un'ipersuperficie spezzata in n iperpiani coincidenti.

d) Se $x_0^n = 0$ ed $x_0^h x_1^{n-h} = 0$ sono due ipersuperficie di un sistema lineare omaloidico, allora è necessariamente $h = n - 1$.

8. Siano

$$(T) \quad x'_i = f_i(x) \quad ; \quad (T^{-1}) \quad x_i = g_i(x') \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r)$$

le equazioni di una corrispondenza cremoniana T e della sua inversa T^{-1} .

Detta $f(x) = \sum_{i=0}^r c_i f_i(x)$ una qualsiasi forma del sistema lineare $\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$, sia

$$f(x) = \varphi_1^{q_1}(x) \varphi_2^{q_2}(x) \cdots \varphi_s^{q_s}(x)$$

una decomposizione di $f(x)$ in fattori primi.

Dalle $f_i(g) = H(x') x'_i$ segue

$$\varphi_1^{q_1}(g) \varphi_2^{q_2}(g) \cdots \varphi_s^{q_s}(g) = H(x') \sum_{i=0}^r c_i x'_i$$

onde una almeno delle forme $\varphi_j(g)$ è divisibile per $\sum_{i=0}^r c_i x'_i$, e sia, per fissare le idee,

$$\varphi_1(g) = \psi_1(x') \sum_{i=0}^r c_i x'_i.$$

Se σ_1 denota il grado di $\varphi_1(x)$, dalle $g_i(f) = K(x) x_i$ e dalla precedente si trae tosto la

$$K^{\sigma_1}(x) \varphi_1(x) = \psi_1(f) \varphi_1^{q_1}(x) \varphi_2^{q_2}(x) \cdots \varphi_s^{q_s}(x),$$

sicché $K(x)$ è divisibile per ciascuna delle forme $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_s(x)$. Da ciò, per il n. 2, b), segue che:

Le componenti irriducibili di un'ipersuperficie qualsiasi di un sistema lineare omaloidico sono anche tutte tranne al più una, componenti della jacobiana del sistema.

9. Tenuto conto della definizione di ipersuperficie t. e. data nel n. 1, dimostriamo che:

Se $\sum_{i=0}^r c_i f_i(x) = 0$ è un'ipersuperficie t. e. del sistema lineare omaloidico

$\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$ definito dalla corrispondenza cremoniana

$$(T) \quad x'_i = f_i(x) \quad ; \quad (T^{-1}) \quad x_i = g_i(x') \quad (i = 0, 1, \dots, r),$$

allora l'iperpiano $\sum_{i=0}^r c_i x'_i = 0$ è una componente della jacobiana $J'(x')$ della

T^{-1} . Viceversa, se l'iperpiano $\sum_{i=0}^r c_i x'_i = 0$ è una componente della jacobiana

di T^{-1} , allora l'ipersuperficie $\sum_{i=0}^r c_i f_i(x) = 0$ è un'ipersuperficie t. e. del sistema

lineare omaloidico $\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$.

Infatti, siano

$$K(x) = K_1^{v_1}(x) K_2^{v_2}(x) \cdots K_t^{v_t}(x) \quad , \quad H(x') = H_1^{v'_1}(x') H_2^{v'_2}(x') \cdots H_t^{v'_t}(x')$$

decomposizioni in fattori primi delle forme $K(x)$ ed $H'(x')$ definite da T e T^{-1} (n. 2, b). Se l'ipersuperficie $\sum_{i=0}^r c_i f_i(x) = 0$ è t. e., allora si ha

$$\sum_{i=0}^r c_i f_i(x) = K_1^{q_1}(x) K_2^{q_2}(x) \cdots K_t^{q_t}(x);$$

sicché, ricordando che (n. 2, d)

$$K_j(g) = b_j H_1^{q_{1j}}(x') H_2^{q_{2j}}(x') \cdots H_t^{q_{tj}}(x') \quad (j = 1, 2, \dots, t),$$

risulta

$$H(x') \sum_{i=0}^r c_i x'_i = b H_1^{a_1}(x') H_2^{a_2}(x') \cdots H_t^{a_t}(x')$$

con $b = b_1 b_2 \cdots b_t$ ed $a_s = \sum_{j=1}^t q_{sj} \rho_j$ ($s = 1, 2, \dots, t$). Ne segue che (a meno

di un fattore costante) $\sum_{i=0}^r c_i x'_i$ coincide con una delle forme $H_1(x')$, $H_2(x')$, $\dots$, $H_t(x')$, onde la prima parte del teorema. Viceversa, supponiamo ad

esempio che sia $\sum_{i=0}^r c_i x'_i = a H_1(x')$; allora, ricordando che (n. 2, d)

$$H_j(f) = a_j K_1^{p_{1j}}(x) K_2^{p_{2j}}(x) \cdots K_t^{p_{tj}}(x) \quad (j = 1, 2, \dots, t),$$

risulta

$$(4) \quad \sum_{i=0}^r c_i f_i(x) = aH_1(f) = aa_1 K_1^{p_{11}}(x) K_2^{p_{21}}(x) \cdots K_t^{p_{t1}}(x),$$

onde l'ipersuperficie $\sum_{i=0}^r c_i f_i(x) = 0$ è t. e.

Dalla proprietà dimostrata segue in particolare che:

Le ipersuperficie t. e. del sistema lineare omaloidico $\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$ sono tante quante sono le componenti lineari distinte della jacobiana del sistema lineare omaloidico $\sum_{i=0}^r \lambda_i g_i(x') = 0$ definito dalla T^{-1} .

10. Abbiamo visto (n. 9) che, se l'ipersuperficie $\sum_{i=0}^r c_i f_i(x) = 0$ è t. e.,

allora l'iperpiano $\sum_{i=0}^r c_i x'_i = 0$ coincide con una delle ipersuperficie $H_1(x') = 0$, $H_2(x') = 0, \dots, H_t(x') = 0$ e che, se questo per esempio coincide colla $H_1(x') = 0$, allora vale la (4). Ne consegue che *gli esponenti con cui i fattori $K_1(x)$, $K_2(x)$, $\dots, K_t(x)$ compaiono nella forma $\sum_{i=0}^r c_i f_i(x)$ sono gli elementi di una colonna della matrice P di cui al n. 2, e). Dunque, ricordando che $\det P = \pm n$, si ha che:*

Se nel sistema lineare omaloidico $\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$ esistono s ipersuperficie t. e. (linearmente indipendenti o no):

$$f^{(i)}(x) = b_i K_1^{q_{1i}}(x) K_2^{q_{2i}}(x) \cdots K_t^{q_{ti}}(x)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s; \rho_{ji} \geq 0; s \leq t),$$

allora la matrice $[\rho_{ji}]$ degli esponenti con cui $K_1(x)$, $K_2(x)$, $\dots, K_t(x)$ compaiono come fattori nelle singole forme $f^{(i)}(x)$ è formata con s distinte colonne di una matrice quadrata P , d'ordine t , ad elementi interi non negativi ed a determinante $\pm n$. Quindi, se $s = t$, il determinante della matrice (quadrata) $[\rho_{ji}]$ vale $\pm n$.

11. OSSERVAZIONI - a) Può accadere che le ipersuperficie t. e. di un sistema lineare omaloidico siano *linearmente dipendenti*, come dimostra il seguente esempio:

$$(T) \begin{cases} x'_0 = x_0^2 x_1 \\ x'_1 = x_0 x_1 x_2 \\ x'_2 = x_2 (x_0 + x_2)^2 \end{cases} \quad (T^{-1}) \begin{cases} x_0 = x_0'^2 x_2' \\ x_1 = x_1' (x_0' + x_1')^2 \\ x_2 = x_0' x_1' x_2'. \end{cases}$$

Per esso si ha $r = 2$, $n = 3$, e

$$\begin{aligned} K(x) &= x_0^3 x_1^2 x_2 (x_0 + x_2)^2, & H(x') &= x_0'^3 x_1' x_2'^2 (x_0' + x_1')^2 \\ J(x) &= 3 x_0^2 x_1 x_2 (x_0 + x_2)^2, & J'(x') &= 3 x_0'^2 x_1' x_2' (x_0' + x_1')^2. \end{aligned}$$

Le ipersuperficie t. e. del sistema lineare omaloidico $\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$ sono le seguenti quattro ($s = t = 4$):

$$x_0^2 x_1 = 0, \quad x_0 x_1 x_2 = 0, \quad x_2 (x_0 + x_2)^2 = 0, \quad x_0 x_1 (x_0 + x_2) = 0,$$

e l'ultima è combinazione lineare delle precedenti. Aggiungasi che attualmente la matrice $P = [p_{ji}]$ degli esponenti è

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e si ha $\det P = 3$, in accordo col n. 10.

b) Il numero s delle ipersuperficie t. e. del sistema lineare omaloidico $T: \sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$ può *non essere uguale* all'analogo numero s' delle ipersuperficie t. e. del sistema lineare omaloidico $\sum_{i=0}^r \lambda_i' g_i(x') = 0$, definito dalla T^{-1} , come dimostra il seguente esempio:

$$(T) \begin{cases} x_0' = x_0 (x_1 x_2 + x_0^2) \\ x_1' = x_2 (x_1 x_2 + x_0^2) \\ x_2' = x_2^3 \end{cases} \quad (T^{-1}) \begin{cases} x_0 = x_0' x_1' x_2' \\ x_1 = x_1'^3 - x_0'^2 x_2' \\ x_2 = x_1'^2 x_2' \end{cases}$$

Per esso si ha $r = 2$, $n = 3$, e

$$\begin{aligned} K(x) &= x_2^4 (x_1 x_2 + x_0^2)^2, & H(x') &= x_1'^6 x_2'^2 \\ J(x) &= 3 x_2^4 (x_1 x_2 + x_0^2), & J'(x') &= 3 x_1'^5 x_2'. \end{aligned}$$

Il sistema lineare omaloidico $\sum_{i=0}^r \lambda_i f_i(x) = 0$ possiede due ipersuperficie t. e. ($s = t = 2$) e cioè le $x_2 (x_1 x_2 + x_0^2) = 0$ e $x_2^3 = 0$; mentre il sistema lineare omaloidico $\sum_{i=0}^s \lambda_i' g_i(x') = 0$, definito dalla T^{-1} , possiede una sola ipersuperficie t. e., e cioè la $x_1'^2 x_2' = 0$.