Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Douglas Derry

Sugli spazi osculatori dei poligoni d'ordine n di L_n

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.5, p. 253–259.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_253_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Geometria. *Sugli spazi osculatori dei poligoni d'ordine n di* L_n. Nota di DOUGLAS DERRY, presentata [*] dal Socio B. SEGRE.

Gli spazi osculatori di un poligono di ordine n nello spazio proiettivo reale di dimensione n vennero definiti dall'autore [1], al fine di dimostrare un teorema di dualità per questi poligoni. La presente Nota sviluppa la teoria elementare di tali spazi, in vista di applicazioni che verranno fatte in una Nota successiva, alla quale rinviamo per la Bibliografia. Una parte di questa teoria ha stretta analogia con quella classica degli spazi osculatori delle curve differenziabili di un iperspazio.

1. – NOTAZIONI E TEOREMI PRELIMINARI.

1.1. Denotiamo con L_q, $0 \leq q \leq n-1$, un sottospazio lineare di dimensione q dello spazio proiettivo reale di dimensione n, L_n; con $[E_1, E_2, \cdots]$ il sottospazio lineare di L_n generato dai punti od insiemi di punti $E_1, E_2, \cdots$.

1.2. Siano $A_1, A_2, \cdots, A_r$ i vertici di un poligono contenuto in L_n. I suoi lati verranno denotati con $A_1 A_2, A_2 A_3, \cdots, A_{r-1} A_r$ e, nel caso in cui esso sia chiuso, $A_r A_1$ (1). In quest'ultimo caso gli indici si computeranno modulo r, con ché per esempio A_1 ed A_{r+1} vengono a denotare lo stesso vertice.

1.3. Sia $A_i A_{i+1}$ un lato di un poligono π. Un punto dell'intersezione $L_{n-1} \cap A_i A_{i+1}$ si dice *punto di intersezione* di L_{n-1} e π se è un vertice A_i, A_{i+1}, oppure se è il solo punto di $A_i A_{i+1}$ in $L_{n-1} \cap A_i A_{i+1}$.

1.4. Un poligono si dice di *ordine n* nello spazio L_n se (1) nessun L_{n-1} lo contiene e (2) nessun L_{n-1} lo interseca in più di n punti. Col simbolo π_n indicheremo un tale poligono.

1.5. $k+1$ vertici distinti qualsiansi di un poligono π_n, $0 \leq k \leq n$, vengono rappresentati mediante vettori linearmente indipendenti, come segue dalla definizione dell'ordine di π_n.

1.6. Se $0 < k \leq n$, una porzione $A_i A_{i+1} \cdots A_{i+k}$ di un poligono π_n è un poligono π'_k.

1.7. *Un poligono aperto π_n: $A_1 A_2 \cdots A_r$ può sempre venir chiuso con un segmento $A_r A_1$ senza che ciò venga ad aumentare il suo ordine, ed un tale segmento è unico.*

Dimostrazione. – Se il poligono $A_1 A_2 \cdots A_r$ viene chiuso mediante uno dei due segmenti $A_r A_1$ in modo che diventi pari, diventerà dispari se viene chiuso con l'altro segmento. Un poligono d'ordine n è pari (dispari) se n è

(*) Nella seduta del 17 novembre 1962.

(1) Ad esempio, $A_1 A_2$ designa così uno determinato dei due segmenti definiti dai punti A_1, A_2 sulla retta che li congiunge, inclusi gli estremi.

pari (dispari). Dunque, se il poligono chiuso $A_1 A_2 \cdots A_r$ è d'ordine n, il segmento $A_r A_1$ deve esser scelto in modo che questo poligono sia pari (dispari) se n è pari (dispari). Quindi, se esiste un segmento $A_r A_1$, tale che il poligono chiuso $A_1 A_2 \cdots A_r$ sia di ordine n, $A_r A_1$ è unico.

Sia dunque $A_r A_1$ un segmento scelto in modo che il poligono chiuso $A_1 A_2 \cdots A_r$ sia pari (dispari) se n è pari (dispari). Sia π questo poligono chiuso. Supponiamo che esista un iperpiano L_{n-1} che intersechi π in più di n punti. Ogni punto di intersezione di L_{n-1} e π, che non sia punto interno di $A_r A_1$ è anche punto di intersezione di L_{n-1} e π_n. Ma π_n ha ordine n, quindi L_{n-1} interseca π in $n+1$ punti, dei quali uno è un punto interno di $A_r A_1$. Da 1.3 segue che $A_r \notin L_{n-1}$. Pertanto, se L_{n-1} contiene un vertice di π, esiste un vertice A_i tale che $A_{i+1} \notin L_{n-1}$. Utilizzando 1.5, è possibile spostare L_{n-1} in L'_{n-1} in modo che ogni vertice in L_{n-1}, ad eccezione di A_i, sia in L'_{n-1} ed L'_{n-1} intersechi $A_i A_{i+1}$ in un punto interno. Se lo spostamento è abbastanza piccolo, ogni punto d'intersezione di L_{n-1} e π si sposta in un punto d'intersezione di L'_{n-1} e π; ma L'_{n-1} contiene un vertice di π in meno di L_{n-1}. Procedendo in tal modo, dopo un numero finito di spostamenti è possibile di sostituire L_{n-1} con un iperpiano $\bar{L}_{n-1}$ che non contenga alcun vertice di π, ma l'intersechi in almeno, e quindi esattamente, $n+1$ punti. Ma questo contraddice l'ipotesi che π sia pari (dispari) se n è pari (dispari). Quindi non esiste alcun L_{n-1} intersecante π in più di n punti e π ha ordine n. Nessun iperpiano contiene π, perché un tale iperpiano conterrebbe anche π_n, in contraddizione con 1.4 (1). Dunque π soddisfa alla definizione 1.4 ed il teorema resta stabilito.

2. – Sottospazi osculatori.

2.1. Gli spazi osculatori L_0 di un poligono π_n sono, per definizione, i punti stessi del poligono. Se $A_i A_{i+1} \cdots A_{i+k-1}$, $0 < k < n$, è una porzione di un poligono chiuso π_n: $A_1 A_2 \cdots A_r$; segue da 1.6 ed 1.7 che esiste un segmento unico $A_{i+k} A_{i-1}$, tale che $A_{i-1} A_i \cdots A_{i+k}$ sia un poligono chiuso π'_{k+1}. L_k, $0 < k < n$, si chiamerà *spazio osculatore* se

$$[A_i, A_{i+1}, \cdots, A_{i+k-1}] \subseteq L_k \subseteq [A_{i-1}, A_i, \cdots, A_{i+k}],$$

senza che L_k contenga alcun punto interno del segmento $A_{i+k} A_{i-1}$.

L'insieme degli spazi osculatori definiti da una porzione $A_i A_{i+1} \cdots A_{i+k-1}$ è un segmento del fascio di asse $[A_i, A_{i+1}, \cdots, A_{i+k-1}]$, limitato dagli iperpiani $[A_{i-1}, A_i, \cdots, A_{i+k-1}]$ ed $[A_i, A_{i+1}, \cdots, A_{i+k}]$, nello spazio $[A_{i-1}, A_i, \cdots, A_{i+k}]$. Uno spazio osculatore interno al segmento del fascio verrà rappresentato col simbolo $L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+k-1})$.

Le (rette) tangenti di un poligono sono, per definizione, gli spazi osculatori di dimensione 1.

2.2. Se $A'_i A'_{i+1}$, $i \neq j$, $i+1 \neq j$, *è la proiezione del lato* $A_i A_{i+1}$ *del poligono* $\pi_n : A_1 A_2 \cdots A_r$, $n > 1$, *dal vertice* A_j, *ed* $A'_{j-1} A'_{j+1}$ *quella delle tangenti* $L(A_j)$, $A'_1 A'_2 \cdots A'_{j-1} A'_{j+1} \cdots A'_r$ *è un poligono chiuso* π_{n-1}.

Una dimostrazione di questo fatto trovasi in 2.2 [1].

La proiezione di π_n da A_i, assieme alle proiezioni delle tangenti $L(A_i)$, si chiamerà semplicemente proiezione di π_n da A_i.

2.3. *Se* $A_i A_{i+1} \cdots A_j \cdots A_{i+k-1}$ *è una porzione di un poligono chiuso* $\pi_n : A_1 A_2 \ldots A_r$, $1 < k < n$, *e* $\pi_{n-1} : A'_1 A'_2 \cdots A'_{j-1} A'_{j+1} \cdots A'_r$ *la proiezione di* π_n *dal vertice* A_j, *la proiezione di uno spazio osculatore* $L(A_i A_{i+1} \cdots \cdots A_{i+k-1})$ *di* π_n *da* A_j *è uno spazio osculatore* $L(A'_i A'_{i+1} \cdots A'_{j-1} A'_{j+1} \cdots A'_{i+k-1})$ *di* π_{n-1}. *Viceversa, ad ogni spazio* $L(A'_i A'_{i+1} \cdots A'_{j-1} A'_{j+1} \cdots A'_{i+k-1})$ *corrisponde esattamente uno spazio* $L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+k-1})$.

Dimostrazione. – La proiezione da A_j degli elementi del fascio F dello spazio $[A_{i-1}, A_i, \cdots, A_{i+k}]$ di asse $[A_i, A_{i+1}, \cdots, A_j, \cdots, A_{i+k-1}]$ è l'insieme di tutti gli elementi del fascio F' di $[A'_{i-1}, A'_i, \cdots, A'_{j-1}, A'_{j+1}, \cdots, A'_{i+k}]$ di asse $[A'_i, A'_{i+1}, \cdots, A'_{j-1}, A'_{j+1}, \cdots, A'_{i+k-1}]$. Inoltre, per ogni elemento L'_{k-1} di F' esiste esattamente un elemento di F la cui proiezione è L'_{k-1}. Segue, da 1.7, che esiste un segmento $A_{i+k} A_{i-1}$ assieme a cui la porzione $A_{i-1} A_i \cdots A_j \cdots A_{i+k}$ forma un poligono π'_{k+1}. La proiezione di π'_{k+1} da A_j è, secondo 2.2, un poligono $\pi'_k : A'_{i-1} A'_i \cdots A'_{j-1} A'_{j+1} \cdots A'_{j+k}$. In particolare, la proiezione di $A_{i+k} A_{i-1}$ è il lato $A'_{i+k} A'_{i-1}$ di π'_k. L'insieme di tutti gli $L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+k-1})$ è secondo la loro definizione, l'insieme di tutti gli elementi di F che non intersecano $A_{i+k} A_{i-1}$. La proiezione di questo insieme da A_j è l'insieme di tutti gli elementi di F' che non intersecano $A'_{i+k} A'_{i-1}$. Ma, secondo 2.1, tale insieme è precisamente quello di tutti gli $L(A'_i A'_{i+1} \cdots A'_{j-1} A'_{j+1} \cdots A'_{i+k-1})$. Resta così provato l'asserto.

2.4. *Uno spazio* L_{n-1}, $n > 1$, *che contenga una porzione* $A_i A_{i+1} \cdots \cdots A_{i+n-2}$ *di un poligono chiuso* $\pi_n : A_1 A_2 \cdots A_r$ *è uno spazio osculatore* $L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2})$ *di* π_n *se, e soltanto se,* L_{n-1} *non contiene alcun punto della porzione* $A_{i+n-1} A_{i+n} \cdots A_{i+r-1}$ *di* π_n.

Dimostrazione. – Sia $\pi_{n-1} : A'_1 A'_2 \cdots A'_{i-1} A'_{i+1} \cdots A'_r$ la proiezione di π_n dal vertice A_i ed L'_{n-2} quella di L_{n-1}.

Sia dapprima $n = 2$. In questo caso, la porzione $A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2}$ riducesi al solo punto A_i, mentre la proiezione π_1 di π_2 è la retta proiettiva. Una retta che contenga A_i si proietta in un punto interno di $A'_{i-1} A'_{i+1}$ se, e soltanto se, essa non interseca la porzione $A_{i+1} A_{i+2} \cdots A_{i+r-1}$ di π_2. D'altronde, secondo 2.2, i punti interni di $A'_{i-1} A'_{i+1}$ sono le proiezioni delle tangenti $L(A_i)$. Quindi le rette che contengono A_i e che non intersecano $A_i A_{i+1} \cdots A_{i+r-1}$ sono le tangenti $L(A_i)$. Il teorema è così stabilito in questo caso.

Passiamo ora a dimostrarlo per i poligoni π_n, $n > 2$, assumendolo vero per i poligoni π_{n-1}. L_{n-1} non interseca la porzione $A_{i+n-1} A_{i+n} \cdots A_{i+r-1}$ se, e soltanto se, L'_{n-2} non interseca la proiezione $A'_{i+n-1} A'_{i+n} \cdots A'_{i+r-1}$. Dall'assunto segue che L'_{n-2} non interseca la porzione $A'_{i+n-1} A'_{i+1} \cdots A'_{i+r-1}$ se, e soltanto se, esso è uno spazio osculatore $L(A'_{i+1} A'_{i+2} \cdots A'_{i+n-2})$. A norma di 2.3, L_{n-1} è uno spazio $L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2})$ se, e soltanto se, L'_{n-2} è uno spazio $L(A'_{i+1} A'_{i+2} \cdots A'_{i+n-2})$. Dunque L_{n-1} è uno spazio $L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2})$ se, e soltanto se, esso non interseca la porzione $A_{i+n-1} A_{i+n} \cdots A_{i+r-1}$. Il risultato resta così stabilito per i poligoni π_n, ed il teorema segue per induzione.

3. – Gli insiemi $S(A_r A_1)$.

3.1. Per un poligono chiuso $\pi_n : A_1 A_2 \cdots A_r$ conveniamo che $S(A_r A_1)$ denoti l'insieme dei punti interni al lato $A_r A_1$ se $n = 1$, e l'insieme di tutte le intersezioni $\bigcap_{i=r-n+2}^{r+1} L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2})$ se $n > 1$.

Per un poligono aperto d'ordine n, $\pi_n : A_1 A_2 \cdots A_r$, conveniamo che $S(A_r A_1)$ denoti l'insieme definito dal corrispondente poligono chiuso di ordine n, $A_1 A_2 \cdots A_r$, che si ottiene chiudendo π_n col segmento $A_r A_1$, scelto secondo 1.7.

3.2. *Se* $S(A_r A_1)$ *è definito dal poligono* $\pi_n : A_1 A_2 \cdots A_r$, *allora:*

(1) $S(A_r A_1)$ *è l'interno di un n-simplesso i cui vertici sono:* $P_1 = A_1$, $P_2 = [A_1, A_2] \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+1}]$, $P_3 = [A_1, A_2, A_3] \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+2}], \cdots, P_n = [A_1, A_2, \cdots, A_n] \cap [A_r, A_{r-1}]$, $P_{n+1} = A_r$;

(2) *se* $\pi_{n-1} : A'_1 A'_2 \cdots A'_{r-1}$ *è la proiezione di* π_n, $n > 1$, da A_r *sullo iperpiano* $[A_1, A_2, \cdots, A_n]$, *quella di* $S(A_r A_1)$ *è* $S(A'_{r-1} A'_1)$. *I vertici dell'* $(n-1)$*-simplesso* $S(A'_{r-1} A'_1)$ *sono* $P'_1 = A_1 = P_1$, $P'_2 = [A'_1, A'_2] \cap [A'_{r-1}, A'_{r-2}, \cdots, A'_{r-n+1}] = P_2, \cdots, P'_n = A'_{r-1} = P_n$.

Dimostrazione. – Nel caso $n = 1$, $S(A_r A_1)$ è, secondo la precedente definizione, il segmento aperto $A_r A_1$ di π_1, cioè l'interno di un 1–simplesso $P_1 P_2$, con $P_1 = A_1$, $P_2 = A_2$. Quindi la (1) è in tal caso, evidente. Assunte quindi come vere le affermazioni (2) ed (1) per i poligoni π_{n-1}, $n > 1$, dimostriamole per i poligoni π_n.

Sia $\bar{L}_{n-1}$ l'iperpiano $[A_1, A_2, \cdots, A_n]$. Segue, dall'ordine di π_n, che $A_r \notin \bar{L}_{n-1}$. Si definisce così una proiezione da A_r su $\bar{L}_{n-1}$. La proiezione di π_n è, secondo 2.2, un poligono π_{n-1}. I vertici di π_{n-1} sono $A'_i = [A_r, A_i] \cap \bar{L}_{n-1}$, $1 \leq i < r$. Ne segue che $[A'_{r-1}, A'_{r-2}, \cdots, A'_{r-k}] \subseteq [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-k}] \cap \bar{L}_{n-1}$, $1 \leq k \leq n-1$. Ma, a norma di 1.5, i due spazi $[A'_{r-1}, A'_{r-2}, \cdots, A'_{r-k}]$, $[A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-k}] \cap \bar{L}_{n-1}$ hanno la stessa dimensione, e quindi coincidono. Applicando il risultato (1) a π_{n-1}, si ha che $S(A'_{r-1} A'_1)$ è l'interno di un $(n-1)$-simplesso, i cui vertici sono $P'_1 = A'_1$, $P'_2 = [A'_1, A'_2] \cap [A'_{r-1}, A'_{r-2}, \cdots, A'_{r-n+1}]$, $P'_3 = [A'_1, A'_2, A'_3] \cap [A'_{r-1}, A'_{r-2}, \cdots, A'_{r-n+2}], \cdots, P'_n = A'_{r-1}$. Ora, dato che $A'_i = A_i$, $1 \leq i \leq n$, si possono rispettivamente scrivere questi vertici come: A_1, $[A_1, A_2] \cap \bar{L}_{n-1} \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+1}] = [A_1, A_2] \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+1}]$, $[A_1, A_2, A_3] \cap \bar{L}_{n-1} \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+2}] = [A_1, A_2, A_3] \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+2}], \cdots, [A_1, A_2, \cdots, A_n] \cap [A_r, A_{r-1}]$. In particolare, tutte le intersezioni $P_1 = A_1$, $P_2 = [A_1, A_2] \cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+1}]$, $P_3 = [A_1, A_2, A_3] \cap$

$\cap [A_r, A_{r-1}, \cdots, A_{r-n+2}], \cdots, P_n = [A_1, A_2, \cdots, A_n] \cap [A_r, A_{r-1}]$ sono punti.

Mostriamo ora che l'insieme di tutte le intersezioni

$$\bigcap_{i=r-n+2}^{r} L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2})$$

è l'insieme di tutte le rette $[A_r, X]$, $X \varepsilon S(A'_{r-1} A'_1)$. Da $r-n+2 \leq i \leq r$ segue che $i \leq r \leq i+n-2$. Quindi ogni porzione $A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2}$, $i \leq r \leq i+n-2$, di π_n contiene il vertice A_r. Se $n=2$ l'intersezione di cui sopra diviene solo $L(A_r)$. Ma in questo caso, a norma di 2.2 $L(A_r)$ può scriversi come $[A_r, X]$, dove X è un punto interno al lato $A'_{r-1} A'_1$ di π_1, e vice versa. Ma $S(A'_{r-1} A'_1)$ è, per definizione, l'insieme di tutti i punti interni di $A'_{r-1} A'_1$ e in questo caso il risultato è provato. Se $n > 2$, ogni $L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2})$ può scriversi come $[A_r, L(A'_i A'_{i+1} \cdots A'_{r-1} A'_{r+1} \cdots \cdots A_{i+n-2})]$ e vice versa, secondo 2.3. Ne segue che

$$\bigcap_{i=r-n+2}^{r} L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2}) = \bigcap_{i=r-n+2}^{r} [A_r, L(A'_i A'_{i+1} \cdots A'_{r-1} A'_{r+1} \cdots$$
$$\cdots A'_{i+n-2}]) = [A_r, \bigcap_{i=r-n+2}^{r} L(A'_i A'_{i+1} \cdots A'_{r-1} A'_{r+1} \cdots A'_{i+n-2})] = [A_r, X],$$

$X \varepsilon S(A'_{r-1} A'_1)$, e vice versa.

Sia $P_{n+1} = A_r$. Poiché $P_{n+1} \notin [A_1, A_2, \cdots, A_n] = [P_1, P_2, \cdots, P_n]$, esiste un sistema di coordinate proiettive tale che i punti $P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}$ hanno, rispettivamente, coordinate $(1, 0, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$ $\cdots, (0, 0, \cdots, 1)$ mentre i punti di $S(A'_{r-1} A'_1)$ sono i punti con le coordinate $(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0)$, $x_i > 0$, $1 \leq i \leq n$. In questo sistema i punti sulle rette

$$\bigcap_{i=r-n+2}^{r} L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2})$$

sono i punti che hanno coordinate $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1})$, $x_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, assieme al punto P_{n+1}. L'equazioni $x_n = 0$, $x_{n+1} = 0$, $A_n x_n + A_{n+1} x_{n+1} = 0$, definiscono, rispettivamente, gli spazi $[P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_{n+1}]$, $[P_1, P_2, \cdots, P_n]$ e gl'iperpiani del fascio di asse $[P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}] = [A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}]$. Dalla loro definizione gli spazi $L(A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$ formano un segmento aperto di questo fascio limitato da $[A_r, A_1, \cdots, A_{n-1}] = [P_{n+1}, P_1, \cdots, P_{n-1}]$ e $[A_1, A_2, \cdots, A_n] = [P_1, P_2, \cdots, P_n]$. Ne segue che gli spazi $L(A_1, A_2 \cdots \cdots A_{n-1})$ sono o l'insieme degli iperpiani $x_n = \lambda x_{n+1}$, $\lambda > 0$, o l'insieme degli iperpiani $x_n = \lambda x_{n+1}$, $\lambda < 0$. Nel primo caso

$$\bigcap_{i=r-n+2}^{r+1} L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2}) =$$

$$= \bigcap_{i=r-n+2}^{r} L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2}) \cap L(A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

è un punto $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$, $x_i > 0$, $1 \leq i \leq n+1$, e nel secondo caso è un punto $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$, $x_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, $x_{n+1} < 0$. In tutti e due casi ogni punto di $S(A_r A_1)$ è un punto interno di un simplesso di vertici $P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}$; viceversa ogni punto interno del simplesso è una intersezione

$$\bigcap_{i=r-n+2}^{r+1} L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2})$$

e così contenuto in $S(A_r A_1)$. Il teorema è stabilito e la dimostrazione di quanto asserito segue per induzione.

Nel seguito denoteremo col simbolo $\overline{S}(A_r A_1)$ il simplesso dell'insieme $S(A_r A_1)$, assieme alla sua frontiera. Inoltre $P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}$, definiti dalle intersezioni di 3.2 (1), rappresenteranno sempre i vertici di $\overline{S}(A_r A_1)$.

3.3. *Se* $S(A_r A_1)$ *è definito dal poligono aperto* $A_1 A_2 \cdots A_r$, *che è una porzione del poligono chiuso* $\pi_n : A_1 A_2 \cdots A_r B_{r+1}$, $r > n$, $S(A_r A_1)$ *contiene la porzione aperta* $A_r B_{r+1} A_1$ *di* π_n.

Dimostrazione. – Nel caso $n = 1$, $S(A_r A_1)$ è la porzione $A_r B_{r+1} A_1$ complementare alla $A_1 A_2 \cdots A_r$, onde il teorema è chiaro. Per $n > 1$, sia π'_n il poligono $A_1 A_2 \cdots A_r$ chiuso mediante il segmento $A_r A_1$, scelto secondo 1.7. Se X è un punto della porzione aperta $A_r B_{r+1} A_1$, basta mostrare che $[X, A_i, A_{i+1}, \cdots, A_{i+n-2}]$ è uno spazio osculatore $L(A_i A_{i+1} \cdots \cdots A_{i+n-2})$ di π'_n, $r - n + 2 \leq i \leq r + 1$; infatti da ciò segue che $X \in \bigcap_{i=r-n+2}^{r+1} L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n+2}) \subseteq S(A_r A_1)$, secondo 3.1.

Dapprima assumiamo che $X = B_{r+1}$. Dalle disuguaglianze, $r - n + 2 \leq i \leq r$, segue che $i \leq r \leq i + n - 2$. Quindi la porzione $A_i A_i \cdots \cdots A_{i+n-2}$, $r - n + 2 \leq i \leq r$, di π'_n contiene il vertice A_r. La porzione $A_{r+1} A_{r+2} \cdots A_{r+n-1}$ contiene il vertice $A_{r+1} = A_1$. Ne segue che $X, A_i, A_{i+1}, \cdots, A_{i+n-2}$, $r - n + 2 \leq i \leq r + 1$, sono vertici consecutivi di π_n. Quindi la porzione $A_{i+n-1} A_{i+n} \cdots A_{i+r-1}$ di π'_n è anche una porzione di π_n. A norma di 1.5 $[X, A_i, A_{i+1}, \cdots, A_{i+n-2}]$ è un iperpiano L_{n-1}. Poiché π_n ha ordine n, L_{n-1} non contiene alcun punto di $A_{i+n-1} A_{i+n} \cdots A_{i+r-1}$. Così, a norma di 2.4, L_{n-1} è uno spazio osculatore $L(A_i A_{i+1} \cdots A_{i+n-2})$ di π'_n e il teorema è stabilito in questo caso.

Se $X \neq B_{r+1}$, X è un punto interno o di $A_r B_{r+1}$ o di $B_{r+1} A_1$, diciamo di $A_r B_{r+1}$. In questo caso siano $A_r X$, $X B_{r+1}$ sottosegmenti di $A_r B_{r+1}$. Sia $X A_1$ il segmento assieme al quale $X B_{r+1}$ ed il lato $B_{r+1} A_1$ di π_n formano un triangolo pari. Si può verificare che $A_r X$, $X A_1$ ed il poligono aperto $A_1 A_2 \cdots A_r$ formano un poligono chiuso $A_1 A_2 \cdots A_r X$ d'ordine n. Se si applica il risultato del paragrafo precedente al poligono $A_1 A_2 \cdots A_r X$ si ottiene il risultato $X \varepsilon S(A_r A_1)$ ed ora il teorema è chiaro in tutti i casi.

3.4. *Se il poligono* $\pi_n : A_1 A_2 \cdots A_r$ *è chiuso, l'intersezione* $\pi_n \cap \overline{S}(A_r A_1)$ *coincide con l'insieme dei punti del lato* $A_r A_1$ *di* π_n.

Dimostrazione. – Se $n = 1$, $S(A_r A_1)$ è costituito, per definizione, dai punti interni al lato $A_r A_1$ di π_1, cioè $\overline{S}(A_r A_1)$ è il lato $A_r A_1$ stesso ed il teorema è evidente.

Assumendolo vero per i poligoni π_{n-1}, $n > 1$, lo dimostreremo per un poligono π_n. Dunque, se $\pi_{n-1}: A'_1 A'_2 \cdots A'_{r-1}$ è la proiezione di π_n dal vertice A_r sull'iperpiano $[A_1, A_2, \cdots, A_n]$, $\pi_{n-1} \cap \bar{S}(A'_{r-1} A'_1)$ è l'insieme dei punti del lato $A'_{r-1} A'_1$ di π_{n-1}. Per la 3.2 (1), A_r è un vertice del simplesso $\bar{S}(A_r A_1)$; quindi $A_r \in \pi_n \cap \bar{S}(A_r A_1)$. A norma di 3.2 (2), la proiezione di $S(A_r A_1)$ da A_r è $S(A'_{r-1} A'_1)$. Poiché la proiezione è una trasformazione continua, per ogni punto diverso da A_r, la proiezione di $\bar{S}(A_r A_1)$ da A_r è $\bar{S}(A'_{r-1} A'_1)$. Dunque, ogni punto di $\pi_n \cap \bar{S}(A_r A_1)$, ad eccezione di A_r, si proietta in un punto di $\pi_{n-1} \cap \bar{S}(A'_{r-1} A'_1)$, cioè in un punto del lato $A'_{r-1} A'_1$ di π_{n-1}. Ma, per la 2.2, i punti della porzione $A_{r-1} A_r A_1$ sono i soli punti di π_n che si proiettano nel segmento $A'_{r-1} A'_1$. Ne segue che $\pi_n \cap \cap \bar{S}(A_r A_1)$ è un sottoinsieme di punti della porzione $A_{r-1} A_r A_1$. Scrivendo gli indici dei vertici di π_n nell'ordine opposto, si deduce che $\pi_n \cap \bar{S}(A_r A_1)$ è un sottoinsieme di punti della porzione $A_r A_1 A_2$. Quindi $\pi_n \cap \bar{S}(A_r A_1)$ è un sottoinsieme di $A_{r-1} A_r A_1 \cap A_r A_1 A_2$ cioè del lato $A_r A_1$.

Consideriamo ora la faccia $P_n P_{n+1} P_1$ del simplesso $\bar{S}(A_r A_1)$. Per la 3.2 (2) si ha: $A'_1 = A_1 = P_1$, $A'_{r-1} = P_n$; per la 3.2 (1): $A_r = P_{n+1}$. Poiché $A'_{r-1} = [A_r, A_{r-1}] \cap [A_1, A_2, \cdots, A_n]$, così $[A_1, A_2, \cdots, A_n]$ contiene i punti della faccia $P_n P_1$ di $\bar{S}(A_r A_1)$, onde $P_n P_1$ è anche una faccia della proiezione $\bar{S}(A'_{r-1} A'_1)$ di $\bar{S}(A_r A_1)$. Ora, poiché $\bar{S}(A'_{r-1} A'_1)$ contiene i punti di $A'_{r-1} A'_1$ ed $A'_{r-1} = P_n$, $A'_1 = P_1$, segue che $A'_{r-1} A'_1$ e $P_n P_1$ coincidono. Pertanto, una tangente $L(A_r)$ di π_n interseca $P_n P_1$ in un punto interno, dato che $A'_{r-1} A'_1$ è, secondo 2.2, la proiezione di tutte le tangenti di π_n dal punto A_r. Quindi $L(A_r)$ separa i due lati $P_n P_{n+1}$ e $P_{n+1} P_1$, del triangolo pari di lati $P_n P_{n+1}$, $P_{n+1} P_1$ e $P_1 P_n$. Poiché $A'_{r-1} \in [A_r, A_{r-1}]$, la retta $[A_r, A_{r-1}]$ contiene $P_n P_{n+1}$. D'altronde, a norma del paragrafo precedente, $P_n P_{n+1}$ non contiene alcun punto del lato $A_r A_{r-1}$ di π_n. Dunque $P_n P_{n+1}$ è quel segmento di $[A_r, A_{r-1}]$ limitato dai punti A'_{r-1} ed A_r, che non contiene alcun punto interno a $A_r A_{r-1}$. Segue, dalla definizione, che $L(A_r)$ si appoggia ai lati $A_r A_{r-1}$, $A_r A_1$ di π_n. Quindi $L(A_r)$ separa $P_n P_{n+1}$ ed $A_r A_1$ ed il triangolo di lati $P_n P_{n+1}$, $A_r A_1$, $P_n P_1$ è pari. Ne discende che $P_{n+1} P_1$ ed $A_r A_1$ coincidono ed $A_r A_1$ è un sottoinsieme di $\bar{S}(A_r A_1)$. Dunque, servendosi del risultato del paragrafo precedente, $\pi_n \cap \bar{S}(A_r A_1)$ ed $A_r A_1$ coincidono. Il teorema segue ora per induzione.