Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Tallini

Sulle connessioni proiettivamente equivalenti di una V_n compatta

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.5, p. 244–252.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_244_0¿

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Geometria. — *Sulle connessioni proiettivamente equivalenti di una* V_n *compatta* (*). Nota di GIUSEPPE TALLINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

1. Nel seguito – salvo contrario avviso – con V_n denoteremo sempre una varietà differenziabile, di dimensione $n\,(>1)$, connessa, di classe C^u, con $u \geq 3$; inoltre le connessioni definite su V_n verranno sempre supposte simmetriche e di classe C^{u-2}. Se R^i_{jkl} è il tensore di curvatura di una tale connessione, chiameremo – secondo l'uso, cfr. [6] p. 247 – primo tensore di curvatura contratto il tensore R^s_{skl} e secondo tensore di curvatura contratto o tensore di Ricci il tensore R^s_{jks}. Una connessione la diremo poi *metrica* se le sue componenti sono i simboli di Christoffel di una metrica di classe C^{u-1} di V_n, *riemanniana* se tale metrica è riemanniana. Una connessione L^i_{jk} la diremo invece *pseudometrica* se su V_n esiste uno scalare $g\,(>0)$ di peso due, e di classe C^{u-1}, tale che $L^s_{sk} = \partial_k \log \sqrt{g}$; si osservi che ogni connessione metrica (in particolare riemanniana) è pseudometrica, g essendo dato dal determinante del tensore metrico preso in valore assoluto. Infine due connessioni di V_n verranno dette, con H. Weyl [7] p. 100, fra loro *proiettivamente equivalenti* quando ammettono le stesse linee autoparallele.

Nella Nota Lincea [5], abbiamo provato – tra l'altro – che *su una* V_n *orientabile e compatta, ogni connessione che sia proiettivamente equivalente ad una connessione riemanniana* Γ *e che ammetta lo stesso tensore di Ricci di* Γ, *deve coincidere con* Γ. Si pone il problema di indagare se, e quando, tale risultato continua a sussistere anche nel caso in cui Γ sia una connessione affatto qualunque. Di ciò appunto ci occuperemo nella presente Nota.

La questione presenta delle difficoltà nuove, non potendosi attualmente disporre di una metrica riemanniana e quindi far uso del teorema della divergenza, strumento fondamentale nella Nota precedente come in molte questioni di geometria riemanniana su una varietà orientabile e compatta.

Ciò nonostante, proveremo (nel n. 3) i seguenti teoremi.

TEOREMA I_1. – *In una* V_n *compatta, per cui il numero di Betti* 1*-dimensionale,* B_1, *sia nullo, due connessioni proiettivamente equivalenti ed aventi lo stesso tensore di Ricci, coincidono.*

TEOREMA I_2. – *Su una* V_n *compatta, per cui sia* $B_1 = 0$, *due connessioni proiettivamente equivalenti,* Γ *e* $\overline{\Gamma}$, *coincidono, se hanno lo stesso primo tensore di curvatura contratto e sono tali che la forma quadratica* $(R_{jk} - \overline{R}_{jk})\,\xi^j \xi^k$, *dove* R_{jk} *e* $\overline{R}_{jk}$ *denotano i tensori di Ricci di* Γ *e* $\overline{\Gamma}$, *risulti ovunque semidefinita positiva oppure ovunque semidefinita negativa.*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca del C.N.R. n. 17.

(**) Nella seduta del 17 novembre 1962.

L'ipotesi, nei precedenti teoremi, che per la V_n sia $B_1 = 0$ è essenziale: nel n. 5 daremo infatti un esempio di due distinte connessioni definite su una superficie torica (ed ivi analitiche), proiettivamente equivalenti fra loro ed aventi lo stesso tensore di Ricci. L'ipotesi $B_1 = 0$ è invece superflua se ci si limita a considerare connessioni pseudometriche. Nel n. 4, dopo alcune considerazioni generali sulle connessioni pseudometriche, dimostreremo infatti il

TEOREMA II. – *Date, su una* V_n *compatta, due connessioni pseudometriche,* L *e* $\bar{L}$, *proiettivamente equivalenti, se – denotati con* R_{jk} *e* $\bar{R}_{jk}$ *i tensori di Ricci di* L *e* $\bar{L}$ *– la forma quadratica* $(R_{jk} - \bar{R}_{jk})\, \xi^j \xi^k$ *è ovunque semidefinita positiva oppure ovunque semidefinita negativa, le due connessioni coincidono.*

Va infine rilevato che, nei teoremi precedenti, l'ipotesi della compattezza è essenziale (cfr. [5] n. 1, settimo capoverso).

2. In questo numero denoteremo sempre con V_n una varietà differenziabile di classe C^u, con $u \geq 2$, dotata di una connessione simmetrica Γ di classe C^0 e per altro arbitraria; indicheremo poi con ∇_i l'operatore di derivazione covariante fatta rispetto a Γ, e porremo $\nabla_{ij} = \nabla_i \nabla_j$.

Sussiste la seguente:

PROPOSIZIONE I. – *Siano dati su* V_n *un tensore simmetrico* g^{ij} *di classe* C^0, *per cui la forma* $g^{ij}\eta_i \eta_j$ *risulti ovunque definita positiva, e un vettore* h^i *di classe* C^0. *Su* V_n *rimane allora intrinsecamente definito, e ivi di classe* C^0, *l'operatore*

$$\Lambda = g^{ij}\nabla_{ij} + h^k \nabla_k$$

trasformante uno scalare φ *di classe* C^2, *nello scalare* $\Lambda\varphi$ *di classe* C^0. *Ebbene se lo scalare* φ *ammette un massimo (minimo) su* V_n *ed inoltre è ovunque* $\Lambda\varphi \geq 0$ (≤ 0), *allora è* $\varphi = cost.$ *In particolare se la* V_n *è compatta, ogni scalare* φ *di classe* C^2 *per cui sia* $\Lambda\varphi \geq 0$ (≤ 0) *ovunque su* V_n, *si riduce ad una costante* (1).

Denotato con φ_0 il massimo (minimo) assunto da φ su V_n, sia I l'insieme – certo non vuoto – dei punti P di V_n in cui sia $\varphi(P) = \varphi_0$. Supposto il complementare, $\mathcal{C}I$, di I non vuoto, per i punti P′ di $\mathcal{C}I$ si deve avere $\varphi(P') < \varphi_0$ $(> \varphi_0)$, onde – in forza della continuità di φ – $\mathcal{C}I$ è un aperto, e quindi I è chiuso. Poiché la V_n è connessa e si è supposto $\mathcal{C}I$ non vuoto, la frontiera, $\mathcal{F}I$, di I, che appartiene ad I, è non vuota; sia P_0 un punto di $\mathcal{F}I$, si avrà $\varphi(P_0) = \varphi_0$ (in quanto $P_0 \in I$). Possiamo sempre trovare un dominio coordinato U, contenente P_0, e tale che, nell'omeomorfismo coordinato, U si rappresenti in un aperto $\mathcal{A}$ limitato e connesso dello spazio numerico R^n. In U si ha $\Lambda\varphi \geq 0$ (≤ 0), onde in $\mathcal{A}$ è:

$$[g^{ij}\partial_{ij} + (h^k - g^{ij}\Gamma^k_{ij})\partial_k]\,\varphi \geq 0\,(\leq 0),$$

ove l'espressione tra parentesi quadre a primo membro è un operatore differenziale di tipo ellittico e di classe C^0; in forza di un ben noto teorema di

(1) Osserviamo che la Proposizione I continua a sussistere – e si dimostra in modo del tutto analogo – anche se Γ non è simmetrica.

E. Hopf [3], si ha allora in $\mathcal{A}$, e quindi in U, $\varphi = \text{cost} = \varphi_o$. Ma in U cadono punti P′ di $\mathcal{C}$I (in quanto U è un aperto contenente P_o, e $P_o \in \mathcal{F}I$) per i quali dunque $\varphi(P') < \varphi_o (> \varphi_o)$. L'assurdo deriva dall'aver ammesso $\mathcal{C}$I non vuoto. Onde I coincide con la V_n e ne segue l'asserto.

Dimostriamo ora la seguente:

PROPOSIZIONE II. – *Se uno scalare φ di classe C^2 su V_n, ammette un massimo (minimo) su V_n ed inoltre la forma quadratica $(\nabla_{ij}\varphi)\xi^i\xi^j$ è ovunque semidefinita positiva (negativa), allora è $\varphi = cost$. In particolare se la V_n è compatta, ogni scalare φ di classe C^2, per cui la forma quadratica $(\nabla_{ij}\varphi)\xi^i\xi^j$ risulti ovunque semidefinita positiva (negativa), si riduce ad una costante. Ne segue che gli unici scalari φ per cui è:*

$$\nabla_{ij}\varphi = c\,\nabla_i\varphi\,\nabla_j\varphi,$$

con c scalare mai negativo (mai positivo) su V_n, sono le costanti, se V_n è compatta.

In forza di un noto teorema di Whitney [8], sulla V_n esiste un tensore simmetrico g^{ij} di classe C^{u-1}, tale che ovunque la forma $g^{ij}\eta_i\eta_j$ sia definita positiva. Se la forma $(\nabla_{ij}\varphi)\xi^i\xi^j$ in un punto P di V_n è semidefinita positiva (negativa) le $\nabla_{ii}\varphi$ sono tutte non negative (non positive) in P, e ciò in una qualsiasi carta contenente P: infatti se per esempio fosse in P, per una fissata carta, $\nabla_{11}\varphi$ negativo (positivo), scelte le ξ^i in modo che sia $\xi^1 \neq 0$, $\xi^\alpha = 0$, $\alpha = 2, \cdots, n$, si avrebbe, in P, $(\nabla_{ij}\varphi)\xi^i\xi^j = (\nabla_{11}\varphi)(\xi^1)^2 < 0 (> 0)$, e ciò è escluso. D'altra parte possiamo sempre scegliere – come è noto – una carta contenente P, tale che in P si abbia $g^{ij} = \delta^{ij}$, con δ^{ij} simboli di Kronecker. Essendo in P, relativamente a questa carta, $\nabla_{ii}\varphi \geq 0 (\leq 0)$ si avrà: $\Lambda\varphi = g^{ij}\nabla_{ij}\varphi = \delta^{ij}\nabla_{ij}\varphi = \sum_{i=1}^{n}\nabla_{ii}\varphi \geq 0 (\leq 0)$. Ma allora, poiché $\Lambda\varphi$ è uno scalare, qualsiasi sia il riferimento in P si ha $\Lambda\varphi \geq 0 (\leq 0)$. Data l'arbitrarietà di P su V_n, ne segue che su V_n è ovunque $\Lambda\varphi \geq 0 (\leq 0)$. Se ne deduce dunque l'asserto in forza della proposizione precedente, qualora ivi si ponga $h^k = 0$.

3. Siano date su una stessa V_n di classe C^u $(u \geq 3)$ due connessioni Γ e $\overline{\Gamma}$ di classe C^{u-2}, proiettivamente equivalenti. Risulterà dunque (cfr. per esempio [6] p. 213):

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j\psi_k + \delta^i_k\psi_j, \tag{1}$$

ove δ^i_j sono i simboli di Kronecker e ψ_k è il vettore di classe C^{u-2} su V_n dato da $\psi_k = (\overline{\Gamma}^s_{sk} - \Gamma^s_{sk})/(n+1)$. Denotati con $\overline{R}^i_{jkl}$ e R^i_{jkl} i tensori di curvatura di $\overline{\Gamma}$ e Γ, e osservato che per definizione è:

$$\overline{R}^i_{jkl} = \partial_l\overline{\Gamma}^i_{jk} - \partial_k\overline{\Gamma}^i_{jl} + \overline{\Gamma}^s_{jk}\overline{\Gamma}^i_{sl} - \overline{\Gamma}^s_{jl}\overline{\Gamma}^i_{sk},$$

dalla (1) si ha, ∇_i essendo l'operatore di derivazione covariante fatta rispetto a Γ:

$$\overline{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \delta^i_l\nabla_k\psi_j + \delta^i_k\nabla_l\psi_j + \delta^i_j(\nabla_l\psi_k - \nabla_k\psi_l) + (\delta^i_l\psi_k - \delta^i_k\psi_l)\psi_j; \tag{2}$$

Da (2) segue, $\overline{\Gamma}_{kl}$ e Γ_{kl} denotando i primi tensori di curvatura contratti di $\overline{\Gamma}$ e Γ:

$$(3) \qquad \overline{\Gamma}_{kl} = \overline{R}^s_{skl} = \Gamma_{kl} + (n+1)(\nabla_l \psi_k - \nabla_k \psi_l),$$

ed inoltre, $\overline{R}_{jk}$ e R_{jk} denotando i tensori di Ricci di $\overline{\Gamma}$ e Γ:

$$(4) \qquad \overline{R}_{jk} = \overline{R}^s_{jks} = R_{jk} + (n-1)\psi_j \psi_k + \nabla_j \psi_k - n\nabla_k \psi_j .$$

Allo scopo di dimostrare i teoremi I_1 e I_2 (enunciati nel n. 1), proveremo la seguente proposizione, avente anche interesse a sé:

PROPOSIZIONE III. – *Se su* V_n *le due connessioni proiettivamente equivalenti* Γ *e* $\overline{\Gamma}$, *sono tali che il vettore* $\psi_k = (\overline{\Gamma}^s_{sk} - \Gamma^s_{sk})/(n+1)$ *risulta il gradiente di uno scalare* φ, *che ammette un massimo (minimo) su* V_n, *dal fatto che la forma quadratica* $(R_{ik} - \overline{R}_{jk})\xi^j \xi^k$ *risulti ovunque semidefinita positiva (semidefinita negativa), segue che* Γ *coincide con* $\overline{\Gamma}$.

La proposizione rimarrà completamente provata, non appena la si dimostri nel caso in cui $(R_{jk} - \overline{R}_{jk})\xi^j \xi^k$ sia semidefinita positiva e φ ammetta un massimo su V_n, l'altro caso ottenendosi immediatamente dal precedente mediante lo scambio di Γ con $\overline{\Gamma}$.

Dalla (4) si ha, posto $\nabla_{jk} = \nabla_j \nabla_k$:

$$(R_{jk} - \overline{R}_{jk}) + (n-1)\nabla_j \varphi \nabla_k \varphi = (n-1)\nabla_{jk}\varphi ,$$

onde, se $(R_{jk} - \overline{R}_{jk})\xi^j \xi^k$ è ovunque semidefinita positiva, tale risulterà la forma quadratica $(\nabla_{jk}\varphi)\xi^j \xi^k$, e quindi, se φ ammette un massimo su V_n, in forza della Proposizione II del n. 2, sarà $\varphi =$ cost. ossia $\psi_j = \nabla_j \varphi = \partial_j \varphi = 0$. Dalla (1) segue allora $\Gamma \equiv \overline{\Gamma}$ e cioè l'asserto.

Supponiamo ora che la V_n sia compatta e che il suo numero di Betti 1-dimensionale, B_1, sia nullo. Se è anche $\overline{\Gamma}_{kl} = \Gamma_{kl}$, per la (3) deve aversi $\nabla_l \psi_k - \nabla_k \psi_l = 0$, onde ψ_k è un vettore irrotazionale. La 1-forma $\alpha = \psi_k dx^k$ è allora una forma chiusa. In forza dunque del teorema di dualità di G. de Rham (cfr. [2] p. 133; [1] § 22, § 23; [4] § 20), affermante, per le varietà compatte, l'isomorfismo tra lo spazio vettoriale di coomologia q-dimensionale e il duale dello spazio vettoriale di omologia q-dimensionale, si ha, supponendosi attualmente $B_1 = 0$, che α è un differenziale esatto, cioè che esiste uno scalare φ tale che sia $\alpha = d\varphi$. Onde ψ_k è il gradiente di un tale scalare, il quale ammette un minimo e un massimo su V_n, data la compattezza di V_n e la continuità di φ su V_n. In forza della Proposizione III segue allora il teor. I_2 del n. 1.

Sempre nell'ipotesi che la V_n sia compatta e che sia $B_1 = 0$, se risulta $\overline{R}_{jk} = R_{jk}$, dalla (4) si ha:

$$(n-1)\psi_j \psi_k + \nabla_j \psi_k - n\nabla_k \psi_j = 0 ;$$

sottraendo dalla precedente relazione quella che da essa si ottiene scambiando j con k, si ha $\nabla_k \psi_j - \nabla_j \psi_k = 0$, e quindi, per la (3), $\overline{\Gamma}_{kl} = \Gamma_{kl}$; ne segue il teor. I_1 del n. 1, in forza del teor. I_2 precedentemente dimostrato.

4. Su una V_n di classe C^u, $u \geq 3$, sia data una connessione simmetrica L di classe C^{u-2}. Supponiamo inoltre che su V_n si possa definire uno scalare di peso due, $g > 0$, di classe C^{u-1}, per il quale si abbia $L^s_{sk} = \partial_k \log \sqrt{g}$. (Si osservi che tale uguaglianza ha significato intrinseco: infatti $L^s_{sk} - \partial_k \log \sqrt{g}$, come si prova facilmente, è un vettore covariante – nel senso che, per cambiamenti di coordinate, segue la legge di trasformazione dei vettori covarianti – e quindi il suo annullarsi non dipende dalla scelta delle coordinate). Diremo allora, come convenuto nel n. 1, che L è una *connessione pseudometrica*. Notiamo che ogni connessione metrica è pseudometrica (g essendo dato, in tal caso, dal determinante del tensore metrico preso in valore assoluto) ed inoltre che le connessioni pseudometriche – come ora preciseremo – godono di diverse proprietà di cui godono quelle metriche, ciò ne giustifica il nome.

Osserviamo intanto che, qualunque sia la connessione simmetrica L^i_{jk}, detto R^i_{jkl} il suo tensore di curvatura, per i due tensori di curvatura contratti, L_{kl} e R_{jk} si ha, in base alla stessa definizione di R^i_{jkl}:

(5) $$L_{kl} = R^s_{skl} = \partial_l L^s_{sk} - \partial_k L^s_{sl}$$

(6) $$R_{jk} = R^s_{jks} = R_{kj} + L_{kj}$$

e quindi, *se è* $L_{kl} = 0$, *il tensore di Ricci è simmetrico e viceversa*. Se poi è $L^s_{sk} = \partial_k \log \sqrt{g}$ risulta $L_{kl} = \partial_{lk} \log \sqrt{g} - \partial_{kl} \log \sqrt{g} = 0$, ne segue che:

Per una connessione pseudometrica il primo tensore di curvatura contratto è nullo ed il tensore di Ricci è simmetrico.

Viceversa supponiamo che per una connessione simmetrica L^i_{jk} di classe C^{u-2} su V_n sia $R_{jk} = R_{kj}$ e cioè $L_{kl} = 0$. Scelto comunque un punto P su V_n, possiamo sempre trovare un dominio coordinato U, contenente P, e tale che, nell'omeomorfismo coordinato: $\varphi(U) \to R^n$, U si rappresenti in un aperto $\mathcal{A}$ semplicemente connesso dello spazio numerico R^n. Posto $L_k = L^s_{sk}$, in $\mathcal{A}$ rimangono allora definite le n funzioni L_k ($k = 1, \cdots, n$) di classe C^{u-2}, soddisfacenti alle condizioni $\partial_l L_k - \partial_k L_l = 0$ (in forza delle (5), supponendosi attualmente $L_{kl} = 0$). Essendo $\mathcal{A}$ semplicemente connesso, dovrà allora esistere in $\mathcal{A}$ una funzione γ di classe C^{u-1}, tale che $L_k = \partial_k \gamma$. Consideriamo ora in U lo scalare di peso due e di classe C^{u-1}, dato, nella fissata carta $\varphi(U) \to R^n$, da $g = e^{2\gamma}$ (> 0). In U si ha allora $L_k = L^s_{ks} = \partial_k \log \sqrt{g}$. Dunque in U la connessione L^i_{jk} è pseudometrica. Ne segue che:

Se una connessione simmetrica di V_n *ha nullo il primo tensore di curvatura contratto, oppure ha il tensore di Ricci simmetrico, essa è localmente pseudometrica, nel senso che ogni punto di* V_n *possiede un intorno in cui la connessione è pseudometrica. E viceversa.*

Sussiste infine la seguente caratterizzazione delle connessioni pseudometriche per la V_n compatte con $B_1 = 0$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché su una V_n *compatta di classe* C^u ($u \geq 3$) *per cui sia* $B_1 = 0$, *una connessione* L *di classe* C^{u-2} *sia pseudometrica (in grande) è che il suo tensore di Ricci* R_{jk} *sia simmetrico, oppure che il primo tensore di curvatura contratto* L_{kl} *sia nullo.*

Basta dimostrare la sufficienza della condizione (cfr. penultima Proposizione). Per il teorema di Whitney [8] su V_n esiste una metrica riemanniana, di classe C^{u-1}, $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Consideriamo lo scalare di peso due e di classe C^{u-1}, $g_1 = \det \| g_{ij} \| > 0$. Posto $L_k = L^s_{sk}$ e $T_k = \partial_k \log \sqrt{g_1}$, si verifica facilmente che $v_k = L_k - T_k$ è un vettore covariante di classe C^{u-2}.

D'altra parte si ha $\partial_l v_k - \partial_k v_l = 0$ (in quanto evidentemente è $\partial_l T_k - \partial_k T_l = 0$, e poi è $\partial_l L_k - \partial_k L_l = 0$ per la (5), supponendovi $R_{jk} = R_{kj}$ e cioè $L_{kl} = 0$). Dunque v_k è un vettore irrotazionale; essendo la V_n compatta e $B_1 = 0$, dovrà esistere su V_n uno scalare (puro) φ, di classe C^{u-1} tale che $v_k = \partial_k \varphi$ (basta ragionare come nel penultimo capoverso del n. 3). Rimane così determinato su V_n lo scalare di peso due, sempre positivo, e di classe C^{u-1}, dato da $g = g_1 e^{2\varphi}$. Per esso si ha, in base alle posizioni fatte, $\partial_k \log \sqrt{g} = \partial_k (\varphi + \log \sqrt{g_1}) = v_k + T_k = L_k = L^s_{sk}$; dunque la connessione L è pseudometrica.

Una connessione pseudometrica L determina sulla V_n, su cui è definita, un elemento di volume, col porre $dv = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ sia ora u^i un campo di vettori contravarianti di classe C^1 su V_n, denotato con ∇_i l'operatore di derivazione covariante fatta rispetto ad L, si ha, con facili calcoli:

$$\nabla_i u^i dv = \partial_i (\sqrt{g}\, u^i)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n =$$

$$= d\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sqrt{g}\, u^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n \right).$$

Dunque $\nabla_i u^i dv$ è una n-forma omologa a zero, se ne deduce (ricordando che l'integrale esteso ad una V_n orientabile e compatta di una n-forma di classe C^0, omologa a zero, è nullo, cfr. [2] p. 127) la seguente proposizione, che è una generalizzazione, al caso delle connessioni pseudometriche, del teorema della divergenza.

In una V_n *orientabile e compatta, dotata di una connessione pseudometrica* L, *denotato con* $dv = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ *l'elemento di volume relativo ad* L, *per ogni campo di vettori* u^i *di classe* C^1, *si ha*:

$$\int_{V_n} \nabla_i u^i dv = 0.$$

Dimostriamo infine il teor. II del n. 1. Siano $\bar{L}$ e L due connessioni pseudometriche, proiettivamente equivalenti di una V_n compatta. Risulterà allora

$$\bar{L}^s_{sk} = \partial_k \log \sqrt{\bar{g}} \quad , \quad L^s_{sk} = \partial_k \log \sqrt{g} \quad , \quad \bar{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + \delta^i_j \psi_k + \delta^i_k \psi_j$$

(ove $\bar{g}$ e g sono scalari di peso due, sempre positivi, e ψ_k è un vettore, di V_n). Saturando gli indici i e j nell'ultima delle precedenti tre relazioni e tenendo poi conto delle prime due, posto $\varphi = (\log \sqrt{\bar{g}/g})/(n+1)$, si ha $\psi_k = \partial_k \varphi$. Dunque ψ_k è il gradiente di uno scalare, il quale – essendo continuo sulla V_n, che è compatta – ammette un massimo e un minimo su V_n. Se ne deduce il teor. II del n. 1, in forza della Prop. III del n. 3.

5. In questo numero mostreremo come, su di una superficie torica dotata di una struttura differenziabile di classe C^ω, si possano definire due *distinte* connessioni, di classe C^ω, proiettivamente equivalenti ed aventi lo stesso tensore di Ricci. Ciò tuttavia non è in contrasto con il teor. I_1, risultando – come è ben noto – per la superficie torica $B_1 = 2$. Siffatto esempio – suscettibile di generalizzazioni a varietà di dimensione maggiore di due – mostra che nel teor. I_1 l'ipotesi $B_1 = 0$, fatta sulla V_n, è essenziale.

Sul piano euclideo $E_2(x_1, x_2)$, denoteremo con Q il quadrato aperto di vertici $A_1(0, 0)$, $A_2(4\pi, 0)$, $A_3(4\pi, 4\pi)$, $A_4(0, 4\pi)$, e con $\overline{Q}$ la chiusura di Q. Se in $\overline{Q}$ identifichiamo i punti di lati opposti situati su una stessa perpendicolare a tali lati, otteniamo, come è noto, un modello topologico del toro duedimensionale, che indicheremo con T. Chiameremo r_i $(i = 1, 2)$ il segmento, estremi identificati, staccato dalla retta di equazione $x_i = 2\pi$, su $\overline{Q}$, e s_i $(i = 1, 2)$ quello, estremi identificati, staccato dalla retta $x_i = \pi$.

Denotato con Q il quadrato aperto del piano numerico $S_2(u_1, u_2)$, di vertici $B_1(0, 0)$, $B_2(4\pi, 0)$, $B_3(4\pi, 4\pi)$, $B_4(0, 4\pi)$, su T possiamo definire una struttura differenziabile mediante l'atlante, $\mathcal{A}$, costituito dalle seguenti carte:

I carta. – Dominio di definizione: $U_1 \equiv Q$; codominio: Q; omeomorfismo coordinato φ_1:

$$\{x_i = u_i \qquad (0 < u_i < 4\pi\,;\, i = 1, 2).$$

II carta. – Dominio di definizione: $U_2 \equiv T - r_1 - r_2$; codominio: Q; omeomorfismo coordinato φ_2:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_i = 2\pi - u'_i\,(0 < u'_i \leq 2\pi) \quad , & x_i = 6\pi - u'_i\,(2\pi \leq u'_i < 4\pi)\,, i = 1, 2 \\ \begin{cases} x_1 = 6\pi - u'_1\,(2\pi \leq u'_1 < 4\pi) \\ x_2 = 2\pi - u'_2\,(0 < u'_2 \leq 2\pi) \end{cases} , & \begin{cases} x_1 = 2\pi - u'_1\,(0 < u'_1 \leq 2\pi) \\ x_2 = 6\pi - u'_2\,(2\pi \leq u'_2 < 4\pi)\,. \end{cases} \end{array}\right.$$

III carta. – Dominio di definizione: $U_3 = T - s_1 - s_2$; codominio: Q; omeomorfismo coordinato φ_3:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_i = \pi - u''_i\,(0 < u''_i \leq \pi) \quad , & u_i = 5\pi - u''_i\,(\pi \leq u''_i < 4\pi)\,, i = 1, 2\,. \\ \begin{cases} x_1 = 5\pi - u''_1\,(\pi \leq u''_1 < 4\pi) \\ x_2 = \pi - u''_2\,(0 < u''_2 \leq \pi) \end{cases} , & \begin{cases} x_1 = \pi - u''_1\,(0 < u''_1 \leq \pi) \\ x_2 = 5\pi - u''_2\,(\pi \leq u''_2 < 4\pi)\,. \end{cases} \end{array}\right.$$

I cambiamenti di coordinate, come si verifica facilmente, sono dati, negli aperti di Q ove essi sono definiti, da equazioni lineari, anzi risulta:

$$(7) \qquad \frac{\partial u'_i}{\partial u_j} = \frac{\partial u_i}{\partial u'_j} = -\,\delta^i_j \quad ; \quad \frac{\partial u''_i}{\partial u_j} = \frac{\partial u_i}{\partial u''_j} = -\,\delta^i_j \quad ; \quad \frac{\partial u'_i}{\partial u''_j} = \frac{\partial u''_i}{\partial u'_j} = \delta^i_j\,.$$

Ne segue che l'atlante $\mathcal{A}$ è di classe C^ω e individua quindi su T una struttura differenziabile di classe C^ω.

Sul tutto T rimangono definiti e sono ivi di classe C^ω, la connessione Γ^i_{jk} ed il vettore covariante ψ_i, le cui componenti nella I carta sono date rispettivamente da:

$$(8_1) \qquad \Gamma^1_{11} = [\cos u_1 - (2 + \operatorname{sen} u_1)^2]/(2 + \operatorname{sen} u_1) \quad , \quad \Gamma^i_{jk} = 0 \qquad \text{per } (i, j, k) \neq (1, 1, 1)\,,$$

$$(8_2) \qquad \psi_1 = 2 + \operatorname{sen} u_1 \quad , \quad \psi_2 = 0\,,$$

nella II carta da:

$$(8'_1) \qquad \Gamma'^1_{11} = [\cos u'_1 - (2 - \operatorname{sen} u'_1)^2]/(-2 + \operatorname{sen} u'_1) \quad , \quad \Gamma'^i_{jk} = 0 \quad \text{per } (i, j, k) \neq (1, 1, 1)\,,$$

$$(8'_2) \qquad \psi'_1 = -2 + \operatorname{sen} u'_1 \quad , \quad \psi'_2 = 0\,,$$

nella III carta da:

$$(8''_1) \qquad \Gamma''^1_{11} = [\cos u''_1 + (2 + \operatorname{sen} u''_1)^2]/(2 + \operatorname{sen} u''_1) \quad , \quad \Gamma''^i_{jk} = 0 \quad \text{per } (i, j, k) \neq (1, 1, 1)\,;$$

$$(8''_2) \qquad \psi''_2 = -2 - \operatorname{sen} u''_1 \quad , \quad \psi''_2 = 0.$$

Si verifica infatti facilmente – tenendo presente le (7) e le leggi di trasformazione delle componenti di una connessione e di un vettore – che, effettuando i tre possibili cambiamenti di coordinate, relativi all'atlante $\mathfrak{A}$, che fanno passare: dalla I alla II carta, dalla II alla III carta, dalla III alla I carta, rispettivamente: le (8_i) si mutano nelle $(8'_i)$, le $(8'_i)$ si mutano nelle $(8''_i)$, le $(8''_i)$ si mutano nelle (8_i), $(i = 1, 2)$.

Su T rimane allora anche definita e risulta ivi di classe C^ω la connessione $\overline{\Gamma}$, proiettivamente equivalente a Γ, ma da essa distinta, di componenti $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \psi_k + \delta^i_k \psi_j$. Ebbene, denotati con $\overline{R}^i_{jkl}$ e R^i_{jkl} i tensori di curvatura di $\overline{\Gamma}$ e Γ, si verifica facilmente — calcolando $\overline{R}^i_{jkl}$ e R^i_{jkl} nelle tre carte — che risulta $\overline{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} = 0$. $\overline{\Gamma}$ e Γ dànno così un esempio di due connessioni *distinte*, di classe C^ω proiettivamente equivalenti, definite globalmente su T, e che hanno lo stesso tensore di curvatura e quindi lo stesso tensore di Ricci.

Osserviamo che la connessione Γ (come pure la $\overline{\Gamma}$), pur essendo localmente euclidea (nel senso che per ogni punto di T esiste un intorno in cui le componenti di Γ coincidono con i simboli di Christoffel di una metrica euclidea) in quanto $R^i_{jkl} = 0$, non è riemanniana in grande e tantomeno euclidea; altrimenti si avrebbe una contraddizione con il corollario I di [5] n. 1. Mostriamo infine che anzi Γ non è neanche una connessione pseudometrica (in grande). Infatti se fosse tale, dovrebbe esistere su tutto T uno scalare $g > 0$ di peso due e di classe C^ω, tale che $\partial_k \log \sqrt{g} = \Gamma^s_{sk}$. Nella I carta si avrebbe allora, in forza delle (8_1):

$$\partial_1 \log \sqrt{g} = [\cos u_1 - (2 + \operatorname{sen} u_1)^2]/(2 + \operatorname{sen} u_1) \quad , \quad \partial_2 \log \sqrt{g} = 0 ,$$

Risolvendo siffatto sistema di equazioni differenziali, si otterrebbe per g l'espressione seguente:

$$g(u_1) = k(2 + \operatorname{sen} u_1)^2 e^{2(\cos u_1 - 2u_1)} , \quad k \text{ costante positiva.} \tag{9}$$

Inoltre nella II carta si avrebbe, in forza della $(8'_1)$:

$$\partial_1 \log \sqrt{g'} = [\cos u'_1 - (2 - \operatorname{sen} u'_1)^2]/(-2 + \operatorname{sen} u'_1) \quad , \quad \partial_2 \log \sqrt{g'} = 0 ,$$

da cui risolvendo, si otterrebbe per g':

$$g'(u'_1) = h(2 - \operatorname{sen} u'_1)^2 e^{2(\cos u'_1 + 2u'_1)} , \quad h \text{ costante positiva.} \tag{9'}$$

D'altra parte, il cambiamento di coordinate $\varphi_2^{-1} \cdot \varphi_1$ essendo dato da:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'_i = 2\pi - u_i \,(0 < u_i < 2\pi) \quad , & u'_i = 6\pi - u_i \,(2\pi < u_i < 4\pi) , \; i = 1, 2 , \\ \left\{ \begin{array}{l} u'_1 = 6\pi - u_1 \,(2\pi < u_1 < 4\pi) \\ u'_2 = 2\pi - u_2 \,(0 < u_2 < 2\pi) \end{array} \right. \quad , & \left\{ \begin{array}{l} u'_1 = 2\pi - u_1 \,(0 < u_1 < 2\pi) \\ u'_2 = 6\pi - u_2 \,(2\pi < u_2 < 4\pi) , \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{10}$$

e dovendosi avere

$$J'^2 g'(u'_1(u_1)) = g(u_1) , \qquad (J' \text{ determinante jacobiano della } (10))$$

si avrebbe, in forza delle (9), (9'), (10), risultando $J' = 1$:

$$J'^2 g' = h(2 + \operatorname{sen} u_1)^2 e^{2(\cos u_1 + 4\pi - 2u_1)} = k(2 + \operatorname{sen} u_1)^2 e^{2(\cos u_1 - 2u_1)} = g , \; (0 < u_1 < 2\pi)$$

ed anche

$$J'^2 g' = h(2 + \operatorname{sen} u_1)^2 e^{2(\cos u_1 + 12\pi - 2u_1)} = k(2 + \operatorname{sen} u_1)^2 e^{2(\cos u_1 - 2u_1)} = g , \; (2\pi < u_1 < 4\pi),$$

da cui l'assurdo $he^{8\pi} = k = he^{24\pi}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Paris, Hermann, 1960.

[2] G. DE RHAM, *La théorie des formes différentielles extérieures et l'homologie des variétés différentiables*, « Rend. di Mat. e appl. », (1–2) vol. 20, pp. 105–146 (1961).

[3] E. HOPF, *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, « Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. », *19*, pp. 147–152 (1927).

[4] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. II, Docet, Roma 1956.

[5] G. TALLINI, *Una proprietà in grande delle varietà a connessione affine compatte con applicazioni alle varietà a connessione proiettiva*, « Rend. Acc. Lincei » [8] *32*, pp. 644–648 (1962).

[6] G. VRANCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, L'imprimerie « Rotative », Bucarest 1947.

[7] H. WEYL, *Zur Infinitesimalgeometrie, Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung*, Göttinger Nachrichten, 1921.

[8] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds*, « Ann. of Math. », [2] *37*, pp. 645–680 (1936).