Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Ghelardoni

Sul problema di valori al contorno per l'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.5, p. 237–243.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_237_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Equazioni differenziali. — *Sul problema di valori al contorno per l'equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$ (*). Nota di GIUSEPPE GHELARDONI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

Con questa Nota viene ripreso in esame il problema di valori al contorno per l'equazione differenziale

$$y'' = f(x, y, y')$$

con lo scopo di stabilire un teorema di esistenza, e, con esso, un procedimento di approssimazioni successive atto al calcolo effettivo della soluzione.

Varia è la letteratura sull'argomento (per la quale rimandiamo al lavoro [8] (1)) e vari sono anche i teoremi di esistenza conosciuti, relativi al nostro problema: tra essi una proposizione di G. Scorza Dragoni ([4] pagine 180 e sg.) sembra la più vicina a quella qui stabilita al n° 2 (2).

1. Il problema dell'esistenza di una funzione $\bar{y}(x)$ definita in $[x_1, x_2]$ che sia ivi soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' = F(x, y, y')$$

e verifichi le condizioni

$$\bar{y}(x_1) = y_1 \, , \, \bar{y}(x_2) = y_2$$

e quello dell'esistenza di una funzione $\bar{\bar{y}}(x)$ che sia soluzione in $[0, 1]$ di

$$y'' = f(x, y, y')$$

$\left(\text{con } f(x, y, y') = (x_2 - x_1)^2 \cdot F\left[(x_2 - x_1)\,x + x_1 \, , y \, , \frac{y'}{x_2 - x_1}\right]\right)$

e verifichi le condizioni

$$\bar{\bar{y}}(0) = y_1 \quad , \quad \bar{\bar{y}}(1) = y_2$$

sono manifestamente equivalenti (infatti ci si può ricondurre dall'uno all'altro con un semplice cambiamento di variabile indipendente, del tipo $x = \alpha x' + \beta$).

Senza nuocere alla generalità potremo riferirci quindi al secondo problema.

2. TEOREMA: *Sia data l'equazione differenziale*

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

(*) Sezione Calcoli del C.S.C.E. dell'Università di Pisa.

(**) Nella seduta del 17 novembre 1962.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della Nota.

(2) Rimandiamo il confronto ad altra occasione.

con $f(x, y, y')$ *continua in tutto il campo*

$$C_\infty : 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad |y| < +\infty \quad , \quad |y'| < +\infty$$

e ivi lipschitziana del primo ordine in grande rispetto alle variabili y *e* y', *costanti (assolute) di Lipschitz essendo rispettivamente* L_1 *e* L_2.

Cioè sia:

$$|f(x, y+h, y') - f(x, y, y')| \leq |h| \cdot L_1$$
$$|f(x, y, y'+h) - f(x, y, y')| \leq |h| \cdot L_2 .$$

Presi comunque due numeri y_1 *e* y_2, *se risulta:*

(2) $$(L_1 + 4 L_2) < 8,$$

la (1) *ammette almeno una soluzione* $y = y_0(x)$, $[0, 1]$, *che verifica le condizioni:*

(3) $$y_0(0) = y_1 \quad , \quad y_0(1) = y_2 .$$

a) Osserviamo che per ogni (eventuale) soluzione $\bar{y}(x)$, $[0, 1]$, della equazione (1) si ha:

$$\bar{y}'' = f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) , \quad [0, 1]$$

da cui

(4) $$\bar{y}'(x) = \int_0^x f(\xi, \bar{y}(\xi), \bar{y}'(\xi))\, d\xi + c_1 , \quad [0, 1]$$

(5) $$\bar{y}(x) = \int_0^x (x - \eta)\, f(\eta, \bar{y}(\eta), \bar{y}'(\eta))\, d\eta + c_1 x + c_2 , \quad [0, 1],$$

(c_1, c_2 costanti opportune).

Se poi è anche

$$\bar{y}(0) = y_1 \quad , \quad \bar{y}(1) = y_2 ,$$

si ha:

(6) $$(\bar{y}(0) =)\; c_2 = y_1$$

(7) $$(\bar{y}(1) =) \int_0^1 (1 - \eta) f(\eta, \bar{y}(\eta), \bar{y}'(\eta))\, d\eta + c_1 + y_1 = y_2$$

ossia

(8) $$c_1 = y_2 - y_1 + \int_0^1 (\eta - 1) f(\eta, \bar{y}(\eta), \bar{y}'(\eta))\, d\eta .$$

Sostituendo c_1 e c_2 dati da (8) – (6) in (4) e (5) si ha:

(4') $$\bar{y}' = \int_0^x \eta f(\eta, \bar{y}(\eta), \bar{y}'(\eta))\, d\eta + \int_0^1 (\eta - 1) f(\eta, \bar{y}(\eta), \bar{y}'(\eta))\, d\eta + y_2 - y_1$$

$$(5') \qquad \bar{y} = \int_0^x (x-\eta) f(\eta, \bar{y}(\eta), \bar{y}'(\eta))\, d\eta + \int_0^{x'} x(\eta - 1) f(\eta, \bar{y}(\eta), \bar{y}'(\eta))\, d\eta +$$

$$+ \int_x^1 x(\eta - 1) f(\eta, \bar{y}(\eta), \bar{y}'\,\eta))\, d\eta + (y_2 - y_1)\, x + y_1$$

da cui infine:

$$(9) \qquad \bar{y}' = \int_0^1 g_1(x, \eta) f(\eta, \bar{y}(\eta), \bar{y}'(\eta))\, d\eta + y_2 - y_1, \quad [0, 1],$$

dove

$$(9') \qquad g_1(x, \eta) = \begin{cases} \eta & \eta \leq x \\ \eta - 1 & \eta > x, \end{cases}$$

e

$$(10) \qquad \bar{y} = \int_0^1 g(x, \eta) f(\eta, \bar{y}(\eta), \bar{y}'(\eta))\, d\eta + (y_2 - y_1)\, x + y_1, \quad [0, 1],$$

dove

$$(10') \qquad g(x, \eta) = \begin{cases} \eta(x - 1) & \eta \leq x \\ x(\eta - 1) & \eta > x. \end{cases}$$

Cioè ogni eventuale soluzione di

$$(11) \qquad \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) = y_1, \; y(1) = y_2 \end{cases}$$

è anche soluzione di

$$(12) \qquad \begin{cases} y = \int_0^1 g(x, \eta) f(\eta, y(\eta), y'(\eta))\, d\eta + (y_2 - y_1)\, x + y_1 \\ y' = \int_0^1 g_1(x, \eta) f(\eta, y(\eta), y'(\eta))\, d\eta + y_2 - y_1 \end{cases}$$

(g, g_1 essendo definite rispettivamente da (9') e (10')).

Viceversa ogni soluzione di (12), come subito si verifica, è soluzione di (11). Basterà perciò dimostrare che, nelle ipotesi fatte sulla f, il problema (12) ha almeno una soluzione.

b) Costruiamo a tale scopo la successione di funzioni $\{F_n\}$ con

$$(13) \qquad F_1 = y_1 + (y_2 - y_1)\, x$$

e, per ogni intero $n > 1$, F_n tale che sia

$$(14) \qquad \begin{cases} F_n'' = f(x, F_{n-1}(x), F_{n-1}'(x)), \quad [0, 1] \\ F_n(0) = y_1 \quad , \quad F_n(1) = y_2 \end{cases}$$

cioè (si ripeta il procedimento indicato in *a*), F_n tale che risulti:

$$F'_n = \int_0^1 g_1(x,\eta) f(\eta, F_{n-1}(\eta), F'_{n-1}(\eta))\, d\eta + y_2 - y_1 \tag{15}$$

$$F_n = \int_0^1 g(x,\eta) f(\eta, F_{n-1}(\eta), F'_{n-1}(\eta))\, d\eta + (y_2 - y_1) x + y_1 \tag{16}$$

(col solito significato per g e g_1).

Dimostriamo che le due serie

$$F_1 + (F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + \cdots + (F_n - F_{n-1}) + \cdots \tag{17}$$

$$F'_1 + (F'_2 - F'_1) + (F'_3 - F'_2) + \cdots + (F'_n - F'_{n-1}) + \cdots \tag{18}$$

convergono uniformemente in $[0, 1]$ a due funzioni $y_0(x)$, $y_0^*(x)$ e che quindi è (in $[0, 1]$):

$$y'_0(x) = y_0^*(x) . \tag{19}$$

Posto

$$k = \max_{\substack{x \in [0,1] \\ y \in [y_1, y_2]}} f(x, y, y_2 - y_1)$$

si ha

$$|F_2 - F_1| \le \int_0^1 |g|\, |f(\eta, y_1 + (y_2 - y_1)\eta, y_2 - y_1)|\, d\eta \le \frac{1}{8} k^{(3)},$$

$$|F'_2 - F'_1| \le \int_0^1 |g_1|\, |f(\eta, y_1 + (y_2 - y_1)\eta, y_2 - y_1)|\, d\eta \le \frac{1}{2} k^{(4)},$$

$$|F_3 - F_2| \le \int_0^1 |g|\, |f(\eta, F_2(\eta), F'_2(\eta)) - f(\eta, F_1(\eta), F'_1(\eta))|\, d\eta \le$$

$$\le \frac{1}{8} k \left[\frac{1}{8} L_1 + \frac{1}{2} L_2\right],$$

$$|F'_3 - F'_2| \le \int_0^1 |g_1|\, |f(\cdots) - f(\cdots)|\, d\eta \le \frac{1}{2} k \left[\frac{1}{8} L_1 + \frac{1}{2} L_2\right],$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 |g|\, d\eta = \int_0^x \eta(1 - x)\, d\eta + \int_x^1 x(1 - \eta)\, d\eta = \frac{-x^2 + x}{2} \le \frac{1}{8}.$

(4) $\displaystyle\int_0^1 |g_1|\, d\eta = \int_0^x \eta\, d\eta + \int_x^1 (1 - \eta)\, d\eta = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2} \le \frac{1}{2}.$

$$|F_4 - F_3| \leq \frac{1}{8} k \left[\frac{1}{8} L_1 + \frac{1}{2} L_2\right]^2,$$

$$|F'_4 - F'_3| \leq \frac{1}{2} k \left[\frac{1}{8} L_1 + \frac{1}{2} L_2\right]^2,$$

....

$$|F_n - F_{n-1}| \leq \frac{1}{8} k \left[\frac{1}{8} L_1 + \frac{1}{2} L_2\right]^{n-2},$$

$$|F'_n - F'_{n-1}| \leq \frac{1}{2} k \left[\frac{1}{8} L_1 + \frac{1}{2} L_2\right]^{n-2},$$

....

Ma, per la (2), la serie geometrica di ragione

$$\frac{1}{8} [L_1 + 4 L_2]$$

è convergente, perciò le due serie (17), (18) sono (in [0 , 1]) uniformemente convergenti e vale la (19).

Dimostriamo ora che

$$f(x , F_n(x) , F'_n(x))$$

c o n v e r g e u n i f o r m e m e n t e in [0 , 1] verso la

$$f(x , y_0(x) , y'_0(x)).$$

Infatti è:

$$|f(x , y_0(x) , y'_0(x)) - f(x , F_n(x) , F'_n(x))| \leq L_1 \cdot |F_n - y_0| + L_2 \cdot |F'_n - y'_0|;$$

perciò, per l'uniforme convergenza di (17), (18), in corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_ε tale che, per ogni $n > n_\varepsilon$ e per ogni x di [0 , 1] risulti

$$\left(|F_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2 L_1} \quad , \quad |F'_n - y'_0| < \frac{\varepsilon}{2 L_2} \quad \text{e cioè}\right)$$

$$|f(x , y_0(x) , y'_0(x)) - f(x , F_n(x) , F'_n(x))| < \varepsilon.$$

c) Siamo ora in grado di dimostrare che $y_0(x)$ risolve il problema (12) (e quindi anche il problema (11)).

Posto

$$\psi(x) = y_0(x) - \int_0^1 g(x , \eta) f(\eta , y_0(\eta) , y'_0(\eta)) \, d\eta - y_1 - (y_2 - y_1) x$$

$$\chi(x) = y'_0(x) - \int_0^1 g_1(x , \eta) f(\eta , y_0(\eta) , y'_0(\eta)) \, d\eta - (y_2 - y_1),$$

basterà far vedere che in [0 , 1] è

$$\psi(x) \equiv \chi(x) \equiv 0.$$

Tenendo conto di (16), (15) possiamo scrivere:

$$\psi(x) = y_0(x) - F_n(x) - \int_0^1 g(x, \eta) [f(\eta, y_0(\eta), y_0'(\eta)) - f(\eta, F_n(\eta), F_n'(\eta))] d\eta,$$

$$\chi(x) = y_0'(x) - F_n'(x) - \int_0^1 g_1(x, \eta) [f(\eta, y_0(\eta), y_0'(\eta)) - f(\eta, F_n(\eta), F_n'(\eta))] d\eta.$$

Di qui, per l'uniforme convergenza di

$$F_n(x), F_n'(x) \quad , \quad f(x, F_n(x), F_n'(x))$$

rispettivamente a

$$y_0(x), y_0'(x) \quad ; \quad f(x, y_0(x), y_0'(x)),$$

l'esistenza, in corrispondenza di ogni $\varepsilon > 0$, di un n_ε tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ sia (per ogni $x \in [0, 1]$:

$$|\psi(x)| < \varepsilon \quad , \quad |\chi(x)| < \varepsilon$$

donde

$$\psi(x) \equiv \chi(x) \equiv 0.$$

Il teorema è così dimostrato completamente.

3. Riteniamo opportuno infine rilevare che se (ferme restando le ipotesi fatte nel n° 2) l'equazione

$$L_1 x^2 + 2 L_2 x - 2 = 0$$

ha radice positiva non minore di 1 [(5)], (cioè se L_1 ed L_2 verificano la

$$L_1 + 2 L_2 \leq 2) \tag{20}$$

il nostro problema ha una sola soluzione (teorema di unicità di Ch. J. De la Vallée Poussin: vedasi [1], p. 186).

Bibliografia.

[1] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. 1°, p. 186 (Ed. Zanichelli, 1948).

[2] G. Scorza Dragoni, *Il problema dei valori limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale del 2° ordine*, « Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. 69, pp. 77–112 (1931).

[3] G. Scorza Dragoni, *A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per una equazione differenziale del 2° ordine*, « Rend. Accademia Lincei », vol. XXII, pp. 44–48 (1935).

(5) Ampiezza dell'intervallo [0, 1] da noi considerato.

[4] G. SCORZA DRAGONI, *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del 2º ordine*, « Rend. del Seminario mat. della Università di Roma », serie IV, vol. 2, pp. 177–254.

[5] S. CINQUINI, *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del 2º ordine*, « Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa », vol. VIII, pp. 1–22 (1939).

[6] S. CINQUINI, *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del 2º ordine*, « Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa », vol. VIII, pp. 271–284 (1939).

[7] L. TONELLI, *Sull'equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$ « Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa », vol. VIII, pp. 75–88 (1939).

[8] R. CONTI, *Problèmes linéaires pour les équations différentielles ordinaires*, « Mathematische Nachrichten », 23 Band, Heft 3, pp. 161–178 (1961).