
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

PIOTR BESALA, MIROSŁAW KRZYAŃSKI

Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire normale parabolique du second ordre

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 33 (1962), n.5, p.
230–236.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_230_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Un théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation linéaire normale parabolique du second ordre.* Nota di PIOTR BESALA e MIROSŁAW KRZYŻAŃSKI, presentata (*) dal Socio M. PICONÈ.

1. On considère l'équation linéaire parabolique

$$(1) \quad \mathfrak{F}[u] = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, X) u''_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^m b_k(t, X) u'_{x_k} + c(t, X) u - u_t = f(t, X) \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

dont les coefficients, ainsi que le second membre $f(t, X)$, sont définis dans une couche $\Sigma: 0 < t < T, X(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{E}^m (T > 0)$, $\mathcal{E}^m$ étant l'espace euclidien à m dimensions des variables $x_1, \dots, x_m$. On suppose que l'équation (1) est parabolique normale, c'est à dire que la forme

$$(2) \quad \mathfrak{A}(\Lambda) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, X) \lambda_i \lambda_j \quad (t, X) \in \Sigma$$

est définie positive.

La Note présente concerne le problème qui consiste en la recherche d'une solution $u(t, X)$ de l'équation (1) régulière ⁽¹⁾ dans l'ensemble $\tilde{\Sigma}: 0 \leq t < T, X \in \mathcal{E}^m$ et satisfaisant à la condition initiale

$$(3) \quad u(0, X) = \varphi(X) \quad \text{pour } X \in \mathcal{E}^m,$$

$\varphi(X)$ étant une fonction donnée continue dans $\mathcal{E}^m$. On appelle souvent ce problème le problème de Cauchy ⁽²⁾.

Nous convenons de dire qu'une fonction $w(t, X)$ définie dans la couche $\tilde{\Sigma}$ y est de classe $\underline{E}_\alpha$ (de classe $\bar{E}_\alpha$), $\alpha > 0$, s'il existe deux nombres $M \geq 0$ et $K \geq 0$ (qui dépendent en général de la fonction $w(t, X)$ elle-même), tels qu'on ait

$$(4) \quad w(t, X) \geq -M \exp K |X|^\alpha \quad (\text{resp. } w(t, X) \leq M \exp K |X|^\alpha).$$

La fonction $w(t, X)$ est de classe E_α (voir p. ex. [5], [8]), si elle est de classe $\underline{E}_\alpha$ et de classe $\bar{E}_\alpha$ simultanément.

(*) Nella seduta del 17 novembre 1962.

(1) Une fonction $u(t, X)$ est appelée régulière (par rapport à l'équation (1)) dans un ensemble G de l'espace-temps des variables $t, x_1, \dots, x_m$, si elle est continue dans G et admet les dérivées $u'_t, u'_{x_i}, u''_{x_i x_j}$ ($i, j = 1, \dots, m$) continues à l'intérieur $G^{(i)}$ de l'ensemble G . Nous disons que $u(t, X)$ est une solution de l'équation (1) régulière dans G , si elle est régulière dans G et satisfait à l'équation (1) dans $G^{(i)}$.

(2) Ce n'est pas un problème de Cauchy au sens qu'on attribue à ce terme dans la théorie générale des équations aux dérivées partielles du second ordre, car les conditions de Cauchy se réduisent cette fois à une seule, posée sur une caractéristique.

Nous considérons encore une classe, appelée I_α dans la suite de la Note, des fonctions continues dans $\tilde{\Sigma}$ et jouissant de la propriété suivante: à chaque nombre $T' \in (0, T)$ correspond un nombre $K \geq 0$ tel que l'intégrale

$$\int_0^{T'} dt \int_{\Sigma} |u(t, X)| \exp [-K |X|^\alpha] dX$$

soit convergente.

Dans le cas particulier de l'équation de la propagation de la chaleur

$$(5) \quad u''_{xx} - u_t = 0$$

A. Tychonoff (voir [11]) a démontré que dans la classe E_2 le problème de Cauchy qui vient d'être formulé, admet une solution au plus. Ce résultat a été étendu par M. Krzyżański à l'équation parabolique linéaire normale (1) sous l'hypothèse que ses coefficients sont bornés dans la couche $\tilde{\Sigma}$ (voir [5], [6]) et ensuite [8] au cas, où les coefficients de l'équation (1) satisfont aux conditions suivantes

$$(6) \quad |a_{ij}(t, X)| \leq A_0, |b_k(t, X)| \leq A_1 |X| + B_1 \quad (i, j, k = 1, \dots, m), \\ c(t, X) \leq A_2 |X|^2 + B_2 \quad \text{pour } (t, X) \in \Sigma,$$

$A_0 \geq 0, A_1 \geq 0, B_1 \geq 0, A_2$ et B_2 étant des nombres constants ⁽³⁾.

D'autre part, D. Widder [12] a démontré que toute solution de l'équation (5) régulière et non négative dans une couche $\tilde{\Sigma}: 0 \leq t < T, -\infty < x < +\infty$, s'annulant pour $t = 0$, est nulle identiquement dans $\tilde{\Sigma}$. Ce résultat a été étendu à l'équation parabolique normale (1) homogène ($f(t, X) \equiv 0$) successivement par J. Serrin [9] et A. Friedman [4]. Il n'en résulte pas immédiatement l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation (1) dans la classe de fonctions non négatives, mais on peut déduire cette unicité des autres théorèmes (démontrés dans [4]), auxquels repose le théorème cité.

Dans la note présente nous allons démontrer un théorème concernant l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans la classe $\underline{E}_2$. Naturellement, il en résulte l'unicité de la solution de ce problème dans la classe $\bar{E}_2$ ⁽⁴⁾

2. Nous supposons que les coefficients de l'équation (1) satisfont dans la couche Σ aux inégalités

$$(7) \quad |a_{ij}(t, X)| \leq A_0, |b_k(t, X)| \leq A_1 |X| + B_1 \quad (i, j, k = 1, \dots, m), \\ |c(t, X)| \leq A_2 |X|^2 + B_2,$$

(3) P. BESALA [1] a démontré un théorème analogue relatif à une classe de systèmes paraboliques non linéaires du second ordre. Pour ce qui concerne les systèmes des ordres supérieurs voir p. ex. S. EIDELMAN [3].

(4) P. BESALA [2] a démontré (sous les hypothèses du travail [4]) que toute solution de l'équation (1) (homogène), de classe $\underline{E}_2$ dans $\tilde{\Sigma}$, s'annulant pour $t = 0$, est nulle identiquement dans $\tilde{\Sigma}$.

A_0, A_1, B_1, A_2, B_2 étant des constantes non négatives. La forme $\mathfrak{A}(\Lambda)$ est supposée uniformément définie positive dans Σ , c'est à dire on suppose l'existence d'un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$(8) \quad \mathfrak{A}(\Lambda) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, X) \lambda_i \lambda_j \geq \alpha \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 = \alpha |\Lambda|^2$$

pour tout $(t, X) \in \Sigma$ et pour tout vecteur $\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Tout ceci étant admis, nous allons démontrer le théorème suivant

THÉORÈME 1. - *Nous supposons que le second membre $f(t, X)$ de l'équation (1) est de classe $\bar{E}_2$, à savoir, qu'on a*

$$(9) \quad f(t, X) \leq M_f \exp K_f |X|^2 \quad \text{pour } (t, X) \in \Sigma,$$

M_f et K_f étant des constantes non négatives.

Alors il existe un nombre $K_0 \geq 0$ tel qu'à tout nombre $K \geq \max(K_0, K_f)$ correspond un nombre $\nu(K)$ tel que, $u(t, X)$ étant une solution de l'équation (1) régulière et de classe E_2 dans la couche $\tilde{\Sigma}$ et telle que

$$(10) \quad u(0, X) \geq M \exp K |X|^2,$$

où

$$(11) \quad M \geq M_f \exp(\nu(K) T),$$

on a dans $\tilde{\Sigma}$ l'inégalité

$$(12) \quad u(t, X) \geq M \exp [K |X|^2 - \nu(K) t].$$

Démonstration. - Posons

$$(13) \quad u(t, X) = v(t, X) \exp [K |X|^2 - \nu t],$$

K et ν étant des constantes qui seront choisies convenablement dans la suite. L'équation (1) se transforme en l'équation

$$(14) \quad \bar{\mathcal{F}}[v] = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, X) v''_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^m \bar{b}_k(t, X) v'_{x_k} + \bar{c}(t, X) v - v_t = \bar{f}(t, X),$$

où

$$(15) \quad \begin{aligned} \bar{b}_k &= b_k + 4K \sum_{i=1}^m a_{ik} x_i \quad (k = 1, \dots, m), \quad \bar{c} = 2K \sum_{j=1}^m a_{jj} \\ &+ 4K^2 \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j + 2K \sum_{k=1}^m b_k x_k + c + \nu, \quad \bar{f} = f \exp [-K |X|^2 + \nu t]. \end{aligned}$$

On déduit des formules (15) et des inégalités (7) que les coefficients de l'équation (14) satisfont aux conditions analogues à (6). D'autre part, il résulte de (8) qu'on a $a_{jj}(t, X) \geq \alpha$ ($j = 1, \dots, m$) et il existe un nombre $\mathfrak{B} > 0$ tel que

$$\left| \sum_{k=1}^m b_k(t, X) x_k \right| \leq \mathfrak{B} (1 + |X|^2)$$

pour $(t, X) \in \Sigma$, on a donc, en tenant compte de (8), l'inégalité

$$(16) \quad \bar{c}(t, X) \geq (4K^2\alpha - 2K\beta - A_2)|X|^2 + 2K(m\alpha - \beta) - B_2 + \nu.$$

Soit $\kappa = K_0$ la racine positive de l'équation

$$4\alpha\kappa^2 - 2\beta\kappa - A_2 = 0.$$

Choisissons

$$(17) \quad K \geq \max(K_0, K_f), \quad \nu(K) = \max[0, 2K(\beta - m\alpha) - B_2 + 1].$$

On a alors d'après (16)

$$(18) \quad \bar{c}(t, X) \geq 1.$$

Il résulte de (9), (15) et (17) qu'on a

$$(19) \quad \bar{f}(t, X) \leq M_f \exp[(K_f - K)|X|^2 + \nu t] \leq M_f \exp(\nu T).$$

Supposons que la solution $u(t, X)$ de l'équation (1) satisfasse à la condition (10), où le nombre M satisfait à l'inégalité (11). Soit $v(t, X)$ la solution correspondante de l'équation (14), définie par la formule (13); posons

$$(20) \quad w(t, X) = v(t, X) - M.$$

On a d'après (19), (11) et (18)

$$(21) \quad \bar{\mathcal{F}}[w] = \bar{f} - M\bar{c} \leq 0.$$

En vertu de (10), (20) et (13) on a $w(0, X) \geq 0$. La fonction $u(t, X)$ étant de classe E_2 dans $\tilde{\Sigma}$, il résulte de (21) et du théorème 1 de la note [8] qu'on a $w(t, X) \geq 0$ c'est à dire qu'on a l'inégalité (12) dans $\tilde{\Sigma}$.

3. Nous admettons dans la suite certaine hypothèse concernant l'équation (1). Soit $\mathcal{C}_R$ le domaine cylindrique borné, séparé de la couche Σ par l'hypersurface cylindrique $|X| = R$, R étant un nombre positif. Désignons par S_R^0 la partie de la frontière $F(\mathcal{C}_R)$ de $\mathcal{C}_R$ située sur la caractéristique $t = 0$ et par σ_R la partie de $F(\mathcal{C}_R)$ située sur l'hypersurface $|X| = R$ (surface latérale de $\mathcal{C}_R$), par $\tilde{S}_R$ l'ensemble $S_R^0 + \sigma_R$.

HYPOTHÈSE (A). — *Le nombre $R > 0$ étant choisi d'une manière arbitraire et $\Phi(t, X)$ étant une fonction continue sur $\tilde{S}_R$, arbitraire d'ailleurs, il existe une solution $u_R(t, X)$ de l'équation (1) régulière dans l'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}_R = \mathcal{C}_R + \tilde{S}_R$ et égale à $\Phi(t, X)$ sur $\tilde{S}_R$.*

L'hypothèse (A) est vérifiée lorsque les coefficients de l'équation (1) et la fonction $f(t, X)$ sont assez réguliers.

Nous allons déduire du théorème 1 un lemme suivant:

LEMME 1. — *Nous admettons l'hypothèse (A) relativement à l'équation (1) et nous supposons que les coefficients de cette équation satisfont aux conditions de la forme (7) et que le second membre $f(t, X)$ de cette équation est de classe E_2 dans Σ .*

Ceci étant supposé, à chaque solution $u(t, X)$ de l'équation (1) régulière et de classe E_2 dans la couche $\tilde{\Sigma}$ on peut faire correspondre une solution $\bar{u}(t, X)$ de l'équation

$$(22) \quad \mathcal{F}[u] = -f(t, X)$$

régulière et de classe E_2 dans une couche $\tilde{\Sigma}^* = \mathcal{G}^m \times [0, T^*]$ ($T^* \leq T$), telle qu'on ait $u(t, X) + \bar{u}(t, X) \geq 0$ dans $\tilde{\Sigma}^*$.

Démonstration. - La fonction $f(t, X)$ étant de classe E_2 , il existe deux nombres non négatifs M_f et K_f tels qu'on a

$$(23) \quad |f(t, X)| \leq M_f \exp K_f |X|^2 \quad \text{pour } (t, X) \in \Sigma.$$

Soit $u(t, X)$ une solution de l'équation (1) régulière et de classe E_2 dans $\tilde{\Sigma}$, plus exactement, soit

$$(24) \quad u(t, X) \geq -M \exp K |X|^2 \quad \text{pour } (t, X) \in \tilde{\Sigma}.$$

D'après le théorème 1, il existe un nombre $\bar{K} \geq \max(K_f, K)$ et un nombre $\nu(\bar{K})$ tel que $\bar{u}(t, X)$ étant une solution de l'équation (22) régulière et de classe E_2 dans une couche $\tilde{\Sigma}^* = \mathcal{G}^m \times [0, T^*]$, où $T^* \leq T$ et telle que

$$(25) \quad \bar{u}(0, X) = \bar{M} \exp \bar{K} |X|^2,$$

où $\bar{M} \geq M_f \exp(\nu T^*)$, on a

$$(26) \quad \bar{u}(t, X) \geq \bar{M} \exp [\bar{K} |X|^2 - \nu(\bar{K}) t] \quad \text{pour } (t, X) \in \tilde{\Sigma}^*.$$

Soit

$$(27) \quad \bar{M} = \max [M_f \exp(\nu(\bar{K}) T), M \exp(\nu(\bar{K}) T)].$$

Sous les hypothèses du lemme on déduit du théorème de [7] (voir aussi corollaire 4' de cette note) l'existence d'une solution $\bar{u}(t, X)$ de l'équation (22) ⁽⁵⁾ régulière et de classe E_2 dans une couche $\tilde{\Sigma}^* = \mathcal{G}^m \times [0, T^*]$ (où $T^* \leq T$ est un nombre positif, ne dépendant que des nombres A_0, A_1, B_1, A_2, B_2 et $\bar{K}$), satisfaisant à la condition initiale (25) ⁽⁶⁾. D'après (26) et (27) cette solution satisfait dans $\tilde{\Sigma}^*$ à une inégalité

$$(28) \quad \bar{u}(t, X) \geq M \exp \bar{K} |X|^2,$$

où $\bar{K} \geq K$. Il résulte de (24) et (28) qu'on a $u(t, X) + \bar{u}(t, X) \geq 0$ dans Σ^* .

4. Nous nous référons dans la suite à certains théorèmes sur lesquels repose la démonstration du théorème de Friedman (voir n-ro 1).

THÉOREME 2 ⁽⁷⁾. - On suppose que les coefficients et le second membre de l'équation (1) sont définis dans la couche $\tilde{\Sigma}$ et y satisfont aux conditions suivantes :

(5) Il est évident que si l'équation (1) vérifie l'hypothèse (A), il en est de même de l'équation (22).

(6) Dans le théorème de la note [7] on introduit des parallélépipèdes, au lieu des domaines cylindriques de révolution, mais ceci n'influe point sur la démonstration du théorème.

(7) Ce théorème a été démontré à peu près simultanément par L. SLOBODECKIJ [10] et A. FRIEDMAN [4] pour un système parabolique (au sens de Petrovskij) d'ordre pair quelconque.

1° la forme $\mathfrak{A}(\Lambda)$ est uniformément définie positive (voir n-ro 2);

2° les fonctions a_{ij} , $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_r}$, $\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}$, b_k , $\frac{\partial b_k}{\partial x_r}$, c ($i, j, k, r, s = 1, \dots, m$) sont hölderiennes et bornées;

3° on a $f(t, X) \equiv 0$.

Soit $u(t, X)$ une solution de l'équation (1) régulière et de classe I_2 (voir n-ro 1) dans $\tilde{\Sigma}$. Si $u(0, X) = 0$ pour $X \in \mathbb{E}^m$, on a $u(t, X) \equiv 0$ dans $\tilde{\Sigma}$.

Le théorème 2 implique l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation (1) dans la couche $\tilde{\Sigma}$ dans la classe I_2 (sous les hypothèses 1° et 2°).

THÉORÈME 3⁽⁸⁾. — Sous les hypothèses 1°–3° du théorème 2, toute solution de l'équation (1) régulière et non négative dans la couche $\tilde{\Sigma}$ appartient à la classe I_2 .

5. Il est évident que toute fonction continue et de classe E_2 est aussi de classe I_2 ; ceci permet de déduire aussitôt du théorème 3 et du lemme 1 un lemme suivant:

LEMME 2. — Les hypothèses 1° et 2° du théorème 2 restant valables, nous admettons l'hypothèse (A) relativement à l'équation (1) et nous supposons que la fonction $f(t, X)$ est de classe E_2 dans $\tilde{\Sigma}$. Alors toute solution $u(t, X)$ de l'équation (1) régulière et de classe E_2 dans $\tilde{\Sigma}$ est de classe I_2 dans une couche $\tilde{\Sigma}^* = \mathbb{E}^m \times [0, T^*)$ ($T^* \leq T$).

THÉORÈME 4. — Les hypothèses du lemme 2 restant valables, dans la classe E_2 le problème de Cauchy pour l'équation (1) dans la couche $\tilde{\Sigma}$, avec la condition initiale (3), admet une solution au plus.

Démonstration. — Soient $u_1(t, X)$ et $u_2(t, X)$ deux solutions de l'équation (1) régulières et de classe E_2 dans $\tilde{\Sigma}$, satisfaisant à la même condition initiale (3). Il résulte du lemme 2 et du théorème 2 qu'on a $u_1(t, X) \equiv u_2(t, X)$ dans une couche $\tilde{\Sigma}^* \subset \tilde{\Sigma}$. On étend ensuite de proche en proche cette identité à toute la couche $\tilde{\Sigma}$.

OUVRAGES CITÉS.

- [1] P. BESALA, *On solutions of Non-Linear Parabolic Equations defined in Unbounded Domains*, « Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sciences », Ser. sc. math., astr. et phys. 9, n. 7, 531–535 (1961).
- [2] P. BESALA, *A Remark on a certain problem of M. Krzyżański*, « Colloquium Math. », 10 (sous presse).
- [3] S. EIDELMAN, *Sur le problème de Cauchy pour les systèmes paraboliques non linéaires et quasilinearaires* (en russe), « Dokl. Akad. N. SSSR », 116, n. 6, 930–932 (1957).
- [4] A. FRIEDMAN, *On the uniqueness of the Cauchy problem for parabolic equations*, « American Journal of Math. », 81, n. 2, 503–511 (1959).
- [5] M. KRZYŻAŃSKI, *Sur les solutions des équations du type parabolique déterminées dans une région illimitée*, « Bulletin of the American Math. Soc. », 47, n. 12, 911–915 (1941).

(8) Ce théorème n'est pas énoncé explicitement dans le travail [4] de FRIEDMAN, mais sa démonstration est contenue dans celle du théorème 2 de [4].

- [6] M. KRZYŻAŃSKI, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, « Annales de la Société Polon. de Math. », 18 145–156 (1945).
- [7] M. KRZYŻAŃSKI, (note complémentaire), « Annales de la Soc. Polon. de Math. », 20, 7–9 (1947).
- [8] M. KRZYŻAŃSKI, *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, « Bulletin de l'Acad. Polon. des Sciences », Ser. math., astr. et phys., 7 n. 3, 131–135 (1959).
- [9] J. B. SERRIN, *A uniqueness theorem for the parabolic equation $u_t = a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u$* , « Bulletin of the American Math. Soc. », 60, 344 (1954).
- [10] L. SLOBODECKIJ, *Sur la solution fondamentale et le problème de Cauchy pour un système parabolique* (en russe), « Matiem. Sbornik », 46, 229–258 (1958).
- [11] A. TYCHONOFF, *Théorème d'unicité pour l'équation de la chaleur*, « Recueil Math. de Moscou », 42, 199–215 (1935).
- [12] D. WIDDER, *Positive temperatures on an infinite rod*, « Trans. of the American Math. Soc. », 55, n. 1, 85–95 (1944).