Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Ghizzetti

Alcuni criteri sufficienti di stabilità per gli integrali di un'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.5, p. 219–229.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_219_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Alcuni criteri sufficienti di stabilità per gli integrali di un'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine* (*). Nota di ALDO GHIZZETTI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

In questa Nota mi propongo di dare alcuni criteri sufficienti di stabilità per gli integrali di un'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine.

La stabilità è intesa nel senso di *limitatezza dell'integrale* $x(t)$ *e della sua derivata prima* $\dot{x}(t)$ *per* $t \geq 0$. I predetti criteri derivano da una opportuna formula di maggiorazione di $|x(t)|, |\dot{x}(t)|$, in funzione di due parametri arbitrari, ricavata al n. 1. Nei nn. 2, 3 sono esposti quattro dei predetti criteri, due dei quali possono essere immediatamente applicati sotto forma grafica.

1. Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \tag{1}$$

con $p(t), q(t)$ funzioni reali, continue per $t \geq 0$.

Fissato $t_0 \geq 0$, indicato con α un arbitrario numero reale e con ω un arbitrario numero reale positivo, facciamo la posizione

$$x = e^{-\alpha(t-t_0)}y \tag{2}$$

e sostituiamo alla (1) l'equazione equivalente

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{1}{\omega} P(t)\dot{y} + Q(t)y, \tag{3}$$

ove si è posto

$$\begin{cases} P(t) = -\omega p(t) + 2\alpha\omega, \\ Q(t) = -q(t) + \alpha p(t) - \alpha^2 + \omega^2. \end{cases} \tag{4}$$

La (3) dà luogo al seguente sistema di equazioni integrali di Volterra

$$\begin{cases} y(t) = a\cos\omega(t-t_0) + b\sin\omega(t-t_0) + \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)\left[\frac{1}{\omega}P(\tau)\dot{y}(\tau) + Q(\tau)y(\tau)\right]d\tau, \\ \dot{y}(t) = -a\omega\sin\omega(t-t_0) + b\omega\cos\omega(t-t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\cos\omega(t-\tau)\left[\frac{1}{\omega}P(\tau)\dot{y}(\tau) + Q(\tau)y(\tau)\right]d\tau, \end{cases} \tag{5}$$

con $a = y(t_0)$, $b = \frac{1}{\omega}\dot{y}(t_0)$ ovvero, come segue da (2):

$$a = x(t_0) \quad , \quad b = \frac{1}{\omega}[\dot{x}(t_0) + \alpha x(t_0)]. \tag{6}$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo nell'ambito del gruppo di ricerca n. 22 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 17 novembre 1962.

Se si risolve il sistema (5) col metodo delle approssimazioni successive, assumendo come prima approssimazione $[y_0(t), \dot{y}_0(t)]$ la

$$y_0(t) = a\cos\omega(t-t_0) + b\sin\omega(t-t_0),$$
$$\dot{y}_0(t) = -a\omega\sin\omega(t-t_0) + b\omega\cos\omega(t-t_0),$$

si perviene ad esprimere $y(t)$, $\dot{y}(t)$ mediante le formule

$$(7)\quad \begin{cases} y(t) = a\cos\omega(t-t_0) + b\sin\omega(t-t_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^k}\int_{t_0}^{t}\sin\omega(t-\tau)\,[a\varphi_k(\tau)+b\psi_k(\tau)]\,d\tau, \\ \dfrac{1}{\omega}\dot{y}(t) = -a\sin\omega(t-t_0) + b\cos\omega(t-t_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^k}\int_{t_0}^{t}\cos\omega(t-\tau)\,[a\varphi_k(\tau)+b\psi_k(\tau)]\,d\tau, \end{cases}$$

nelle quali le funzioni $\varphi_k(t)$, $\psi_k(t)$ sono definite per ricorrenza nel modo seguente: posto

$$(8)\quad \begin{cases} A(t) = -P(t)\sin\omega(t-t_0) + Q(t)\cos\omega(t-t_0), \\ B(t) = P(t)\cos\omega(t-t_0) + Q(t)\sin\omega(t-t_0), \end{cases}$$

si ha

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi_1(t) = A(t) \quad , \quad \psi_1(t) = B(t) \\ \begin{matrix}\varphi_k(t)\\ \psi_k(t)\end{matrix} = -A(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\sin\omega(\tau-t_0)\begin{matrix}\varphi_{k-1}(\tau)\\ \psi_{k-1}(\tau)\end{matrix}\,d\tau + B(t)\int_{t_0}^{t}\cos\omega(\tau-t_0)\begin{matrix}\varphi_{k-1}(\tau)\\ \psi_{k-1}(\tau)\end{matrix}\,d\tau \\ (k = 2, 3, \cdots). \end{cases}$$

È del resto ben facile la verifica formale che la $y(t)$ definita da (7) verifica l'equazione (3). Infatti dalle (7) segue subito

$$(10)\quad \ddot{y} + \omega^2 y = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^{k-1}}[a\varphi_k(t) + b\psi_k(t)].$$

D'altra parte, tenendo conto delle (8) e della loro conseguenza

$$(11)\quad \begin{aligned} &P(t)\cos\omega(t-\tau) + Q(t)\sin\omega(t-\tau) = \\ &-A(t)\sin\omega(\tau-t_0) + B(t)\cos\omega(\tau-t_0), \end{aligned}$$

si ricava dalle stesse (7)

$$(12)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{\omega}P(t)\dot{y} + Q(t)y = aA(t) + bB(t) + \\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^k}\Big\{-A(t)\int_{t_0}^{t}\sin\omega(\tau-t_0)\,[a\varphi_k(\tau) + b\psi_k(\tau)]\,d\tau + \\ &+B(t)\int_{t_0}^{t}\cos\omega(\tau-t_0)\,[a\varphi_k(\tau) + b\psi_k(\tau)]\,d\tau\,; \end{aligned}$$

è allora ben evidente, in base alle (9), la coincidenza delle due espressioni (10), (12).

Legittimiamo ora il procedimento formale, maggiorando opportunamente le serie (7) e sorvolando su tutti gli altri dettagli ben noti. Osserviamo anzitutto che dalle (8), (9) si trae

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad & a\,\varphi_1(t) + b\,\psi_1(t) = a\mathrm{A}(t) + b\,\mathrm{B}(t) = \\
&= [b\,\mathrm{P}(t) + a\mathrm{Q}(t)]\cos\omega(t-t_0) + [-a\,\mathrm{P}(t) + b\,\mathrm{Q}(t)]\sin\omega(t-t_0)\,,
\end{aligned}
$$

mentre da (9), (11) segue, per $k > 1$:

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad a\varphi_k(t) + b\psi_k(t) &= -\mathrm{A}(t)\int_{t_0}^{t}\sin\omega(\tau - t_0)\,[a\varphi_{k-1}(\tau) + b\psi_{k-1}(\tau)]\,d\tau \\
&+ \mathrm{B}(t)\int_{t_0}^{t}\cos\omega(\tau - t_0)\,[a\,\varphi_{k-1}(\tau) + b\psi_{k-1}(\tau)]\,d\tau = \\
&= \int_{t_0}^{t}[\mathrm{P}(t)\cos\omega(t-\tau) + \mathrm{Q}(t)\sin\omega(t-\tau)]\,[a\,\varphi_{k-1}(\tau) + b\psi_{k-1}(\tau)]\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Ciò premesso, dimostriamo che, posto

$$
(15)\qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}\quad ,\quad \mathrm{H}(t) = \sqrt{\mathrm{P}^2(t) + \mathrm{Q}^2(t)},
$$

si ha per $t \geq t_0$:

$$
(16)\qquad |a\varphi_k(t) + b\psi_k(t)| \leq c\mathrm{H}(t)\frac{1}{(k-1)!}\left[\int_{t_0}^{t}\mathrm{H}(\tau)\,d\tau\right]^{k-1} = c\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{k!}\left[\int_{t_0}^{t}\mathrm{H}(\tau)\,d\tau\right]^{k}\right\},
$$

$$(k = 1\,,\,2\,,\,3\,,\cdots).$$

Procediamo per induzione. Se $k = 1$, si trae da (13)

$$
|a\varphi_1(t) + b\psi_1(t)| \leq \sqrt{[b\,\mathrm{P}(t) + a\mathrm{Q}(t)]^2 + [-a\,\mathrm{P}(t) + b\,\mathrm{Q}(t)]^2} = c\,\mathrm{H}(t)\,,
$$

mentre, per il passaggio da $k-1$ a k, basta osservare che da (14) segue (per $t \geq t_0$)

$$
\begin{aligned}
|a\varphi_k(t) + b\psi_k(t)| &\leq \int_{t_0}^{t}\sqrt{\mathrm{P}^2(t) + \mathrm{Q}^2(t)}\;c\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{1}{(k-1)!}\left[\int_{t_0}^{\tau}\mathrm{H}(s)\,ds\right]^{k-1}\right\}d\tau = \\
&= c\mathrm{H}(t)\frac{1}{(k-1)!}\left[\int_{t_0}^{t}\mathrm{H}(\tau)\,d\tau\right]^{k-1}, \qquad \text{c. d. d.}
\end{aligned}
$$

Tenuto conto delle (16), si ricava ora dalle (7) che, per $t \geq t_0$, sussistono le formule di maggiorazione

$$
\begin{matrix} |y(t)| \\ \frac{1}{\omega}|\dot y(t)| \end{matrix} \leq c + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^k}\int_{t_0}^{t}c\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{1}{k!}\left[\int_{t_0}^{\tau}\mathrm{H}(s)\,ds\right]^{k}\right\}d\tau = c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t}\mathrm{H}(\tau)\,d\tau\right]^{k},
$$

ossia

$$|y(t)| \leq c e^{\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t} H(\tau)\, d\tau} \quad , \quad |\dot{y}(t)| \leq \omega c e^{\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t} H(\tau)\, d\tau}$$

Pertanto, ricordando la (2) e tenendo presente che da (4), (6), (15) segue

$$c = \frac{1}{\omega} \sqrt{(\alpha^2 + \omega^2)\, x^2(t_0) + 2\alpha x(t_0)\, \dot{x}(t_0) + \dot{x}^2(t_0)}\,, \tag{17}$$

$$H(t) = \sqrt{\omega^2 [p(t) - 2\alpha]^2 + [q(t) - \alpha p(t) + \alpha^2 - \omega^2]^2}\,, \tag{18}$$

possiamo enunciare il teorema seguente:

I. – *Comunque si fissino* $t_0 \geq 0$, α, $\omega > 0$, *per ogni integrale* $x(t)$ *della equazione* (1) *sussistono per* $t \geq t_0$ *le seguenti formule di maggiorazione*

$$\begin{cases} |x(t)| \leq c e^{-\alpha(t-t_0) + \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t} H(\tau)\, d\tau} \\ |\dot{x}(t)| \leq (\omega + |\alpha|)\, c e^{-\alpha(t-t_0) + \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t} H(\tau)\, d\tau} \end{cases} \tag{19}$$

ove c *è la costante definita da* (17) (*il cui valore dipende dall'integrale considerato*) *e* $H(t)$ *è la funzione definita da* (18) (*dipendente soltanto dall'equazione* (1) *e dai parametri* α, ω).

A commento di questo teorema conviene osservare che le maggiorazioni ottenute (19) possono giudicarsi assai « *aderenti* ». Esaminiamo, per esempio, il caso di un'equazione a coefficienti costanti $\ddot{x} + p\dot{x} + q = 0$, nel quale la (19) fornisce

$$|x(t)| \leq c e^{\left(-\alpha + \frac{H}{\omega}\right)(t-t_0)} \quad \text{con } H = \sqrt{\omega^2 (p - 2\alpha)^2 + (q - \alpha p + \alpha^2 - \omega^2)^2}. \tag{20}$$

Evidentemente per giudicare la (20) occorre fare un confronto fra i due numeri $-\alpha + \frac{H}{\omega}$, $-\frac{p}{2}$ nel caso $\frac{p^2}{4} - q < 0$, oppure fra $-\alpha + \frac{H}{\omega}$, $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ nel caso $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$.

Nel 1° caso, basta assumere $\alpha = \frac{p}{2}$, $\omega = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ per ottenere $-\alpha + \frac{H}{\omega} = -\frac{p}{2}$.

Nel 2° caso, posto $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \delta \geq 0$, è facile verificare che risulta sempre $-\alpha + \frac{H}{\omega} > -\frac{p}{2} + \delta$. Però si ha $\inf\limits_{\alpha,\omega}\left(-\alpha + \frac{H}{\omega}\right) = -\frac{p}{2} + \delta$ giacché, fissato $\varepsilon > 0$, assumendo $\alpha = \frac{p}{2} + \delta$, $\omega = \sqrt{\varepsilon(4\delta + \varepsilon)}$, si trova $-\alpha + \frac{H}{\omega} = -\frac{p}{2} + \delta + \varepsilon$.

2. Dal teorema I possiamo dedurre dei criteri sufficienti di stabilità per gli integrali della (1), nel senso già precisato. Infatti dalle (19) discende subito questo teorema:

II. – *Se è possibile scegliere* $t_0 \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\omega > 0$ *in modo che per* $t \geq t_0$ *la funzione*

$$f(t) = -\alpha(t - t_0) + \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t} H(\tau)\, d\tau \tag{21}$$

risulti superiormente limitata, allora tutti gli integrali della (1) *sono stabili.*

Si noti che in questo teorema abbiamo richiesto $\alpha \geq 0$ in quanto per $\alpha < 0$ la $f(t)$ non è superiormente limitata.

Osserviamo pure che lo stesso teorema ha una portata assai modesta nel caso $p(t) \equiv 0$. Infatti, in tal caso, da (18) e (21) discende $H(t) \geq 2\alpha\omega$, $f(t) \geq \alpha(t - t_0)$, onde la $f(t)$, può risultare superiormente limitata solo se si assume $\alpha = 0$. Con $p(t) \equiv 0$, $\alpha = 0$ si ha

$$f(t) = \frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t} |\, q(\tau) - \omega^2 \,|\, d\tau$$

e perciò il teorema II fornisce soltanto il seguente risultato (che è un caso particolare di teoremi noti): *data l'equazione* $\ddot{x} + q(t)x = 0$, *se* $q(t)$ *è somma di una costante positiva e di una funzione sommabile in* $(0, +\infty)$, *allora tutti gli integrali dell'equazione sono stabili.* D'ora in poi intenderemo escluso il caso $p(t) \equiv 0$, sul quale vi è del resto una vasta letteratura.

Passiamo ora a ricavare dei corollari del teorema II di più facile applicazione pratica. Poniamo

$$\varphi(\xi, \eta; \alpha, \omega) = \omega^2(\xi - 2\alpha)^2 + (\eta - \alpha\xi + \alpha^2 - \omega^2)^2 - \alpha^2\omega^2 = \tag{22}$$

$$= (\alpha^2 + \omega^2)\xi^2 - 2\alpha\xi\eta + \eta^2 - 2\alpha(\alpha^2 + \omega^2)\xi + 2(\alpha^2 - \omega^2)\eta + (\alpha^4 + \alpha^2\omega^2 + \omega^4)$$

ed osserviamo che, per α e ω fissati (supponendo, come nel teorema II, $\alpha \geq 0$, $\omega > 0$), la disuguaglianza

$$\varphi(\xi, \eta; \alpha, \omega) \leq 0 \tag{23}$$

definisce, nel piano cartesiano (ξ, η), un certo dominio ellittico $E_{\alpha\omega}$ (che, per $\alpha = 0$, si riduce al punto $\xi = 0$, $\eta = \omega^2$).

Supponiamo ora che per $t \geq t_0$ si abbia

$$H(t) \leq h \qquad \text{con} \quad 0 \leq h \leq \alpha\omega; \tag{24}$$

allora la $f(t)$ è superiormente limitata, perché da (21) segue $f(t) \leq -\left(\alpha - \frac{h}{\omega}\right)(t - t_0) \leq 0$, onde si ha la stabilità di tutti gli integrali della (1). Anzi, se $h < \alpha\omega$, risulta $f(t) \to -\infty$ (per $t \to +\infty$) cosicché, per la (19), non solo si ha la predetta stabilità, ma addirittura che $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ tendono a zero per $t \to +\infty$.

Tenuto conto di (18) e (22), la (24) equivale alla

$$\varphi\,[p\,(t)\,,q\,(t)\,;\alpha\,,\,\omega] \leq h^2 - \alpha^2\,\omega^2 \leq 0 \qquad (\text{per } t \geq t_0)$$

e questa esprime che per $t \geq t_0$ la curva $\xi = p\,(t)\,,\,\eta = q\,(t)$ è contenuta nel dominio ellittico $E_{\alpha\omega}$, anzi è interna a tale dominio se $h < \alpha\omega$. Abbiamo pertanto ottenuto il seguente teorema:

III. – *Considerati in un piano cartesiano* $(\xi\,,\,\eta)$ *gli* ∞^2 *dominii ellittici* $E_{\alpha\omega}$ *definiti dalla*

$$(\alpha^2+\omega^2)\,\xi^2 - 2\,\alpha\xi\eta + \eta^2 - 2\,\alpha\,(\alpha^2+\omega^2)\,\xi + 2\,(\alpha^2-\omega^2)\,\eta + \alpha^4 + \alpha^2\,\omega^2 + \omega^4 \leq 0,$$
$$(\alpha \geq 0\,,\,\omega > 0),$$

se, per t abbastanza grande, la curva di equazioni parametriche $\xi = p\,(t)$, $\eta = q\,(t)$ *è contenuta in [o interna ad] uno dei dominii* $E_{\alpha\omega}$, *allora ogni integrale della* (1) *è stabile [o infinitesimo, assieme alla sua derivata prima, per* $t \to +\infty$].

Possiamo fermarci ad illustrare brevemente la configurazione dei dominii $E_{\alpha\omega}$ con $\alpha > 0\,,\,\omega > 0$ (1). La frontiera di $E_{\alpha\omega}$ è un'ellisse tutta contenuta nel quadrante $\xi > 0\,,\,\eta > 0$ (2) e più precisamente nel rettangolo

$$(25) \qquad \alpha \leq \xi \leq 3\alpha \quad , \quad \alpha^2+\omega^2-\alpha\sqrt{\alpha^2+\omega^2} \leq \eta \leq \alpha^2+\omega^2+\alpha\sqrt{\alpha^2+\omega^2}\,;$$

esso risulta tangente alla retta $\xi = \alpha$ nel punto $\eta = \omega^2$, alla retta $\xi = 3\alpha$ nel punto $\eta = 2\,\alpha^2+\omega^2$, alla retta $\eta = \alpha^2+\omega^2 \mp \alpha\sqrt{\alpha^2+\omega^2}$ nel punto $\xi = \alpha\left(2 \mp \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\right)$. Il centro dell'ellisse è il punto $(2\alpha\,,\,\alpha^2+\omega^2)$ (vedi fig. 1). Poiché al crescere di α i lati verticali del rettangolo (25) si spostano verso destra, mentre al crescere di ω i lati orizzontali si spostano verso l'alto, si deduce che *nessun dominio* $E_{\alpha\omega}$ *è contenuto in un altro* $E_{\alpha'\omega'}$.

Osserviamo poi che *l'unione di tutti i dominii* $E_{\alpha\omega}$ *con* $\alpha > 0\,,\,\omega > 0$ *è il quadrante* $\xi > 0\,,\,\eta > 0$. Basta far vedere che, fissato un punto $P\,(\xi_0\,,\,\eta_0)$ con $\xi_0 > 0\,,\,\eta_0 > 0$, esso è interno ad uno degli $E_{\alpha\omega}$. Infatti se $\eta_0 > \frac{1}{4}\,\xi_0^2$ il punto P è, per esempio, il centro dell'ellisse corrispondente ad $\alpha = \frac{\xi_0}{2}$, $\omega = \sqrt{\eta_0 - \frac{\xi_0^2}{4}}$. Se invece $\eta_0 \leq \frac{\xi_0^2}{4}$, si riconosce facilmente che esso è interno, per esempio, a tutti gli $E_{\alpha\omega}$ con

$$\alpha = \frac{1}{2}\,(\xi_0 + \sqrt{\xi_0^2 - 4\,\eta_0}) \quad \text{e} \quad \omega < \frac{1}{2}\,(\xi_0 - \sqrt{\xi_0^2 - 4\,\eta_0})^{1/2}\,(\xi_0 + 3\sqrt{\xi_0^2 - 4\,\eta_0})^{1/2}.$$

(1) Per un'osservazione già fatta, se $\alpha = 0$ la condizione richiesta dal teorema è verificata solo se $p\,(t) \equiv 0$ e $q\,(t) = \text{cost.} > 0$; allora il teorema esprime il fatto banale che gli integrali dell'equazione $\ddot{x} + \omega^2\,x = 0$ sono stabili. Quindi il teorema III è interessante solo per $\alpha > 0\,,\,\omega > 0$.

(2) Perciò il teorema III si applica soltanto se per t abbastanza grande si ha $p\,(t) > 0$, $q\,(t) > 0$.

Da quest'ultima osservazione e dal teorema III segue evidentemente:

IV. – *Se* $\lim_{t \to +\infty} p(t) = \xi_0 > 0$, $\lim_{t \to +\infty} q(t) = \eta_0 > 0$, *allora tutti gli integrali* $x(t)$ *della* (1) *sono stabili, anzi* $x(t)$ *e* $\dot{x}(t)$ *sono infinitesimi per* $t \to +\infty$.

Si possono dai teorema II e III dedurne vari altri, che ne agevolano l'applicazione. Mi limito in questa Nota a segnalarne uno.

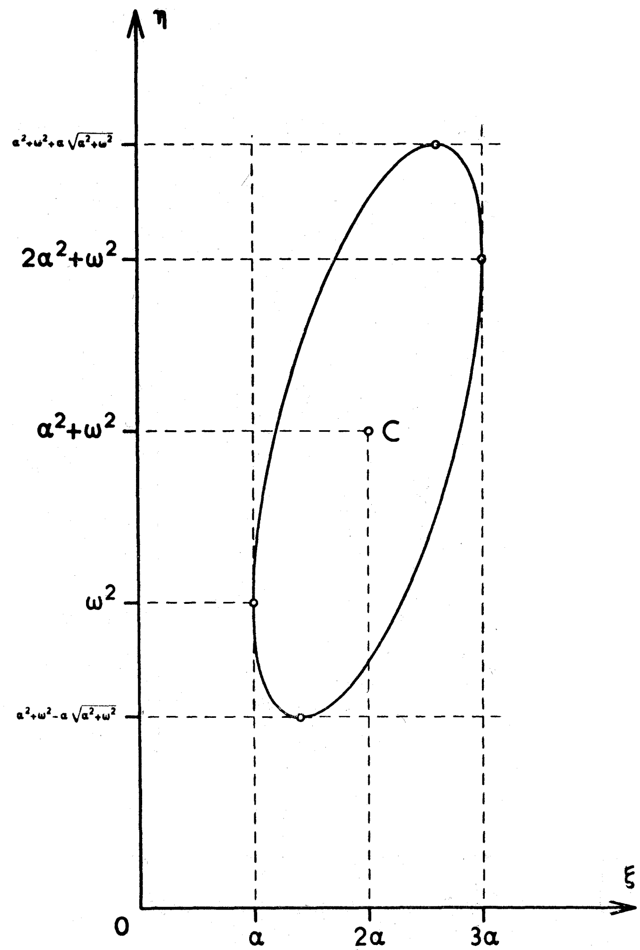

Fig. 1.

3. Supponiamo che $p(t)$ *sia una costante positiva* $[p(t) = p > 0]$ *e che sia* $0 < q_1 \leq q(t) \leq q_2$ (*con* $q_1 < q_2$). In tal caso la curva $\xi = p(t)$, $\eta = q(t)$, considerata nel teorema III, appartiene al segmento σ $(\xi = p\,,\, q_1 \leq \eta \leq q_2)$ e dobbiamo pertanto ricercare sotto quali condizioni σ è contenuto in uno dei dominii $E_{\alpha\omega}$, cioè esiste qualche coppia di numeri $\alpha > 0$, $\omega > 0$ che verifichi il seguente sistema di disuguaglianze

$$p^2(\alpha^2 + \omega^2) - 2pq_i\alpha + q_i^2 - 2p\alpha(\alpha^2 + \omega^2) + 2q_i(\alpha^2 - \omega^2) + \alpha^4 + \alpha^2\omega^2 + \omega^4 \leq 0,$$

$$(i = 1\,,\, 2).$$

Tale sistema si trasforma agevolmente in quest'altro

$$p\alpha - \alpha^2 + \omega^2 - \omega\sqrt{(p-\alpha)(3\alpha - p)} \leq q_1 < q_2 \leq p\alpha - \alpha^2 + \omega^2 + \omega\sqrt{(p-\alpha)(3\alpha-p)}$$

e successivamente in

$$p\alpha - \alpha^2 + \omega^2 - \omega\sqrt{(p-\alpha)(3\alpha-p)} \leq q_1 , \tag{26}$$

$$\frac{1}{3}p < \alpha < p \quad , \quad \omega \geq \frac{1}{2}\,\frac{q_2 - q_1}{\sqrt{(p-\alpha)(3\alpha-p)}} . \tag{27}$$

Le (27) definiscono nel piano (α , ω) un certo dominio illimitato D, contenuto nel quadrante $\alpha > 0$, $\omega > 0$ (vedi fig. 2); dimostreremo fra breve che in D la funzione

$$g(\alpha , \omega) = p\alpha - \alpha^2 + \omega^2 - \omega\sqrt{(p-\alpha)(3\alpha-p)}$$

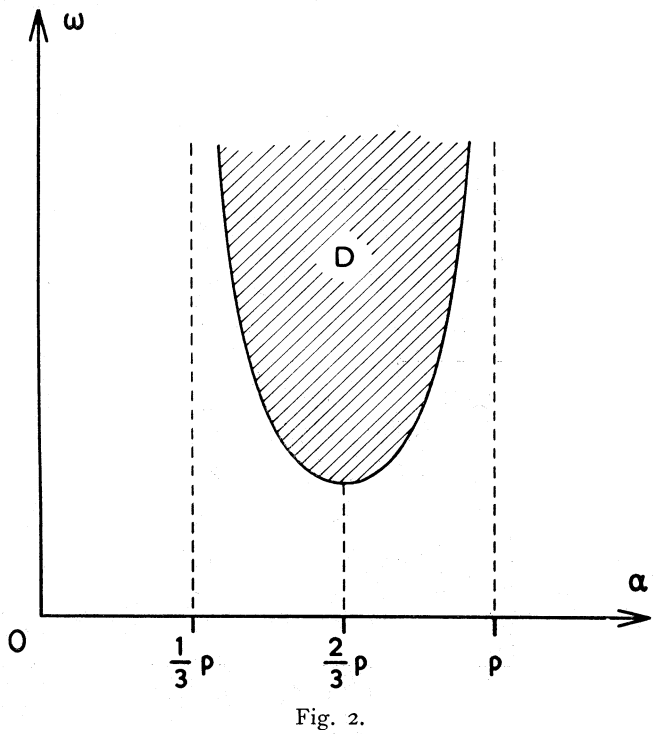

Fig. 2.

è dotata di minimo assoluto (conseguito in un solo punto (α_0 , ω_0) della frontiera di D) e perciò la (26) potrà essere soddisfatta solo se

$$\min_{(\alpha,\omega)\in D} g(\alpha , \omega) \leq q_1 . \tag{28}$$

È questa la condizione cercata affinché σ sia contenuto in qualche $E_{\alpha\omega}$. Si può aggiungere che, se nella (28) vale il segno $=$, anche la (26) e la seconda delle (27) possono sussistere soltanto col segno $=$ (per $\alpha = \alpha_0$, $\omega = \omega_0$); ciò equivale a dire che il segmento σ è contenuto nel solo dominio $E_{\alpha_0\omega_0}$, ma non è interno ad esso. Se invece la (28) vale col segno $<$, allora si possono scegliere α, ω in modo che la (26) e la seconda delle (27) siano soddisfatte col segno $<$; in tal caso il segmento σ è interno a qualche $E_{\alpha\omega}$.

Si tratta ora di dimostrare l'esistenza del minimo assoluto sopra menzionato e di esplicitare (in termini di p, q_1, q_2) la condizione (28).

Intanto, con un semplice calcolo, si vede che la $g(\alpha, \omega)$ è priva di punti estremali; perciò il suo minimo in D (se esiste) va cercato nei punti della frontiera di D. Questa è definita da $\omega = \frac{1}{2}(q_2 - q_1)/\sqrt{(p-\alpha)(3\alpha - p)}$ e su di essa la $g(\alpha, \omega)$ coincide con la funzione seguente

$$G(\alpha) = p\alpha - \alpha^2 + \frac{1}{4}\frac{(q_2 - q_1)^2}{(p-\alpha)(3\alpha - p)} - \frac{1}{2}(q_2 - q_1), \quad \left(\text{con } \frac{1}{3}p < \alpha < p\right).$$

Ponendo

$$\alpha = \frac{1}{3}p(2+t) \quad , \quad \frac{27}{4}\left(\frac{q_2 - q_1}{p^2}\right)^2 = \lambda, \tag{29}$$

possiamo sostituire alla $G(\alpha)$ la

$$\Psi(t) = \frac{G(\alpha)}{p^2} = \frac{1}{9}(1-t)(2+t) + \frac{1}{9}\frac{\lambda}{1-t^2} - \frac{1}{2}\frac{q_2 - q_1}{p^2}, \quad (\text{con} -1 < t < 1). \tag{30}$$

Per $0 < t < 1$ è subito visto che si ha $\Psi(-t) > \Psi(t)$ e perciò il minimo di $\Psi(t)$, se esiste, corrisponde ad un punto dell'intervallo $0 \le t < 1$. L'equazione $\Psi'(t) = 0$ si traduce nella $\left(1 + \frac{1}{2t}\right)(1 - t^2)^2 = \lambda$ e siccome, al crescere di t da 0 a 1, il primo membro decresce da $+\infty$ a 0, la $\Psi'(t)$ si annulla una ed una sola volta per un certo valore τ di t, definito da

$$\left(1 + \frac{1}{2\tau}\right)(1 - \tau^2)^2 = \lambda, \quad (\text{con } 0 < \tau < 1). \tag{31}$$

Si vede poi che risulta $\Psi'(t) < 0$ per $0 \le t < \tau$, $\Psi'(t) > 0$ per $\tau < t < 1$, onde si può concludere che

$$\min_{-1<t<1} \Psi(t) = \Psi(\tau) = \frac{1}{18\tau}(1-\tau)(1 + 7\tau + 4\tau^2) - \frac{1}{2}\frac{q_2 - q_1}{p^2}, \tag{32}$$

come segue da (30) dopo aver espresso λ per mezzo della (31).

Infine, tenuto conto che $g(\alpha, \omega) \to +\infty$ (per $\omega \to +\infty$), si può, per quanto precede, concludere che in D la $g(\alpha, \omega)$ è dotata di minimo assoluto uguale a $p^2\Psi(\tau)$ (3). Ne segue, ricordando la (32), che la condizione (28) diventa

$$\frac{(1-\tau)(1 + 7\tau + 4\tau^2)}{9\tau} \le \frac{q_1 + q_2}{p^2}, \tag{33}$$

ove va tenuto presente [vedi (29), (31)] che il numero τ è univocamente determinato dalla

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}(1 - \tau^2)\sqrt{1 + \frac{1}{2\tau}} = \frac{q_2 - q_1}{p^2}, \quad (0 < \tau < 1). \tag{34}$$

(3) Conseguito nel punto $\alpha_0 = \frac{1}{3}p(2+\tau)$, $\omega_0 = \frac{\sqrt{3}(q_2 - q_1)}{2p\sqrt{1-\tau^2}}$.

Vediamo ora come si possano interpretare le (33), (34). Poniamo

$$\frac{q_1}{p^2} = u \;,\; \frac{q_2}{p^2} = v \;,\; \frac{2}{3\sqrt{3}}(1-\tau^2)\sqrt{1+\frac{1}{2\tau}} = A(\tau) \;,\; \frac{(1-\tau)(1+7\tau+4\tau^2)}{9\tau} = B(\tau)^{(4)}$$

e consideriamo un piano cartesiano (u, v). Le (33), (34), che si possono scrivere $v + u \geq B(\tau)$, $v - u = A(\tau)$, esprimono che, per ogni fissato τ, il punto (u, v) deve appartenere alla semiretta di origine P indicata in fig. 3. Al variare di τ il punto P descrive la curva γ di equazioni parametriche

$$u = \frac{1}{2}[B(\tau) - A(\tau)] \quad , \quad v = \frac{1}{2}[B(\tau) + A(\tau)]$$

che si presenta come in fig. 4 e la predetta semiretta ricopre la parte di piano situata fra tale curva γ (compresa) e la retta $v - u = 0$ (esclusa,

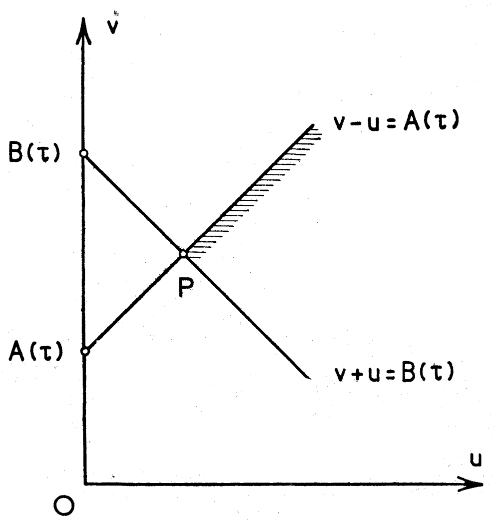

Fig. 3.

perché abbiamo supposto $q_2 > q_1$ e quindi $v > u$). Ma possiamo includere anche tale retta, i cui punti corrispondono al caso $0 \leq q_1 = q_2$, cioè a quello di un'equazione (1) a coefficienti p, q costanti, con $p > 0, q \geq 0$, e quindi ad integrali stabili. Resta così definito il dominio illimitato Δ tratteggiato nella fig. 4 e raggiunta la conclusione che si ha la stabilità degli integrali [il loro annullarsi all'infinito] quando il punto $u = \frac{q_1}{p^2}$, $v = \frac{q_2}{p^2}$ appartiene [è interno] a tale dominio Δ.

Si ha cioè il teorema seguente:

V. – *Sia data l'equazione differenziale*

$$\ddot{x} + p\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{35}$$

(4) È facile verificare che per $0 < \tau < 1$ si ha $A(\tau) < B(\tau)$ e che entrambe le funzioni sono decrescenti.

con p costante positiva e $0 \leq q_1 \leq q(t) \leq q_2$ [5]. *Si consideri in un piano cartesiano (u, v) il dominio illimitato Δ compreso fra la retta $v - u = 0$ e la curva di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} u = \dfrac{1-\tau}{18}\left[\dfrac{1}{\tau}(1 + 7\tau + 4\tau^2) - 2\sqrt{3}\,(1+\tau)\sqrt{1+\dfrac{1}{2\tau}}\right], \\ v = \dfrac{1-\tau}{18}\left[\dfrac{1}{\tau}(1 + 7\tau + 4\tau^2) + 2\sqrt{3}\,(1+\tau)\sqrt{1+\dfrac{1}{2\tau}}\right], \end{cases} \qquad (0 < \tau < 1).$$

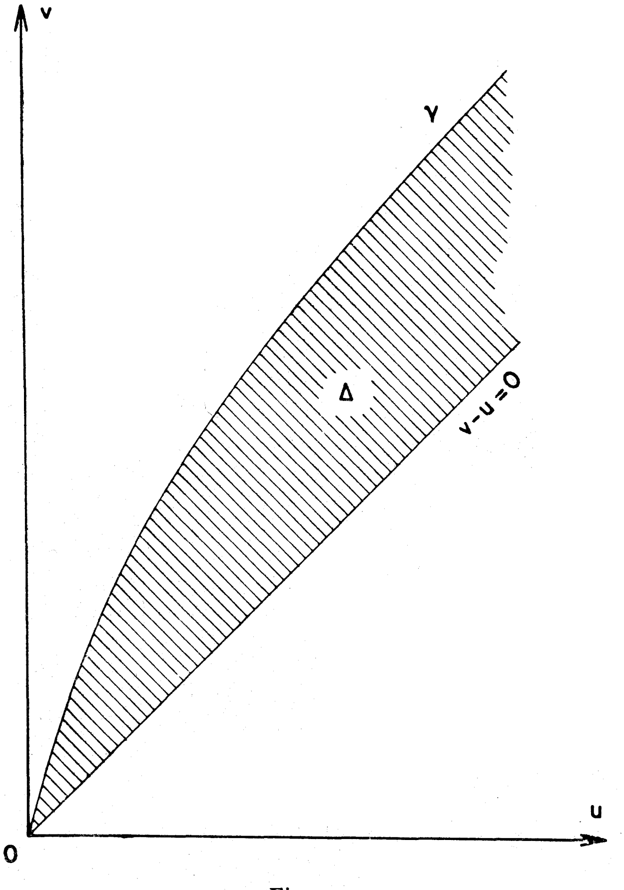

Fig. 4.

Allora, se il punto $u = \dfrac{q_1}{p^2}$, $v = \dfrac{q_2}{p^2}$ cade in Δ, tutti gli integrali della (35) *sono stabili; se cade internamente a Δ ogni integrale $x(t)$ è infinitesimo per $t \to +\infty$, assieme alla sua derivata $\dot{x}(t)$.*

(5) Si badi che non è necessario scegliere q_1, q_2 in modo che questa disuguaglianza valga per tutti i $t \geq 0$; basta che essa valga per t abbastanza grande (teorema III).