
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Laplacien sur une variété riemannienne et spineurs

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 33 (1962), n.5, p. 187–191.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_5_187_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *Laplacien sur une variété riemannienne et spineurs.* Nota (*) del Socio straniero M. ANDRÉ LICHNEROWICZ.

1. Soit V_n une variété différentiable orientée de dimension n , de classe C^∞ , supposée munie d'unem étrique ds^2 de signature quelconque. Sur les q -tenseurs antisymétriques U , G. de Rham a introduit le laplacien défini par :

$$(1.1) \quad \Delta U = (d\delta + \delta d)U$$

où d est l'opérateur de différentiation extérieure et δ celui de codifférentiation (1)

$$\delta: U_{\beta_1 \dots \beta_q} \rightarrow -\Delta^q U_{\alpha \beta_1 \dots \beta_{q-1}}.$$

À partir du tenseur de courbure et du tenseur de Ricci, ΔU peut s'exprimer localement par :

$$(1.2) \quad (\Delta U)_{\beta_1 \dots \beta_q} = -\nabla^q \nabla_q U_{\beta_1 \dots \beta_q} + \sum_k R_{\beta_k q} U_{\beta_1 \dots q \dots \beta_q} - \sum_{k,l}^{k+l} R_{\beta_k q, \beta_l \sigma} U_{\beta_1 \dots q \dots \sigma \dots \beta_q}.$$

J'ai adopté (1.2) comme définition du *laplacien d'un q -tenseur quelconque* (2). L'opérateur (1.2) jouit des propriétés suivantes : il est autoadjoint, commute avec la contraction et préserve les symétries ou antisymétries possibles de U . J'ai ainsi annoncé, sans démonstration, le résultat suivant (3)

THÉORÈME 1. — Si T est un tenseur à dérivée covariante nulle,

$$(1.3) \quad \Delta(T \otimes U) = T \otimes \Delta U.$$

En effet, si T est un p -tenseur tel que $\nabla T = 0$ et U un q -tenseur, il résulte de (1.2) :

$$\Delta(T \otimes U) = T \otimes \Delta U + V \otimes U + W$$

avec :

$$V_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \sum_k R_{\alpha_k q} T_{\alpha_1 \dots q \dots \alpha_p} - \sum_{k,l}^{k+l} R_{\alpha_k q, \alpha_l \sigma} T_{\alpha_1 \dots q \dots \sigma \dots \alpha_p}$$

et :

$$W_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_q} = - \sum_{k,l} R_{\alpha_k q, \beta_l \sigma} T_{\alpha_1 \dots q \dots \alpha_p} U_{\beta_1 \dots \sigma \dots \beta_q}.$$

De l'identité de Ricci appliquée à T il résulte :

$$(1.4) \quad (\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda) T_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \sum_k R_{\alpha_k q, \lambda \mu} T_{\alpha_1 \dots q \dots \alpha_p} = 0$$

(*) Presentata nella seduta del 17 novembre 1962.

(1) ∇ et l'opérateur de dérivation covariante

(2) *Propagateurs et Commutateurs en relativité générale*, « Publ. Math. Ins. Hautes Études Scientif. », n° 10, pp. 26-27 e p. 36 (1961).

(3) (Ibidem, p. 36).

et l'on en déduit $W = 0$. Par contraction de α_l et μ dans (1.4), puis substitution à λ de α_l , on obtient :

$$R_{a_l e} T_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \dots e \dots \alpha_p - \sum_k^{k+l} R_{a_l e, \alpha_l \sigma} T_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \dots e \dots \sigma \dots \alpha_p = 0.$$

En sommant par rapport à l , il vient $V = 0$, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. - Si $\mathcal{C}$ est une application linéaire définie par un tenseur à dérivée covariante nulle, du module des q -tenseurs dans le module des r -tenseurs, $\mathcal{C}$ commute avec Δ . En particulier les opérateurs de Chern ⁽⁴⁾ relatifs aux formes commutent avec Δ .

Considérons en effet l'application $\mathcal{C}$ définie à partir du $(q+r)$ -tenseur C à dérivée covariante nulle par :

$$\mathcal{C}: U_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \rightarrow C_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} U_{\alpha_1 \dots \alpha_q}.$$

De

$$\Delta(C \otimes U) = C \otimes \Delta U$$

et de la commutation de Δ avec la contraction, il résulte :

$$\Delta \mathcal{C} U = \mathcal{C} \Delta U.$$

2. Nous supposons que la variété V_n de dimension paire ($n = 2\nu$) est telle que du fibré principal $\mathcal{E}(V_n)$ des repères orthonormés, on puisse déduire par extension un fibré principal $\varphi(V_n)$ - dit le fibré des repères spinoriels - admettant pour groupe structural $\text{Spin}(2\nu)$ (Ici $\text{Spin}(2\nu)$ est le revêtement universel du groupe pseudo orthogonal qui est le groupe structural de $\mathcal{E}(V_n)$). La variété V_n est dite admettre une *structure spinorielle*; il existe sur V_n un vecteur spineur γ de type (1.1) à dérivée covariante nulle. Si $\gamma_\alpha = (\gamma_\alpha^a b)$ ($\alpha, \dots = 1, \dots, n$ indice tensoriel; $a, b, \dots = 1, \dots, n$ indices spinoriels) est la matrice relative à l'indice α des composantes de γ en repère spinoriel, on a :

$$(2.1) \quad \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2g_{\alpha\beta} e \quad (\gamma^\alpha = g^{\alpha\beta} \gamma_\beta).$$

Nous désignons par $\varphi^{(2)}$ le module des 2-spineurs de type (1.1). Tout élément ψ de $\varphi^{(2)}$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule :

$$(2.2) \quad \psi = \sum_{p=0}^{2\nu} \frac{1}{p!} \gamma^{e_1} \dots \gamma^{e_p} \alpha_{e_1 \dots e_p}^{(p)}$$

où $\alpha^{(p)}$ est une p -forme. Ainsi l'algèbre extérieure des formes de V_n et le module des 2-spineurs admettent, en tant que modules, un isomorphisme :

$$S: \alpha = \sum_p \alpha^{(p)} \rightarrow \psi \in \varphi^{(2)}$$

défini par (2.2).

(4) *SS Chern. Algebraic geometry and Topology, Symposium Lefschetz*, pp. 103-121. Princeton Univ. Press. (1957); ANDRÉ WEIL, *Un théorème de Chern en géométrie riemannienne*, « Sémin. Bourbaki », n° 239, Mai 1962.

Soit λ le spineur $\gamma^1 \dots \gamma^{2^v}$ et posons :

$$B\psi = \lambda\psi \quad \bar{B}\psi = \psi\lambda.$$

Si $\psi = S\Sigma \alpha^{(p)}$ on a :

$$B\psi = S\Sigma (-1)^{p(p-1)/2} (*\alpha^{(p)}) \quad \bar{B}\psi = S\Sigma (-1)^{p(p+1)/2} (*\alpha^{(p)})$$

où $*$ est l'opérateur d'adjonction sur les formes.

Désignons par v l'opérateur sur les formes :

$$v: \quad \alpha = \Sigma \alpha^{(p)} \rightarrow v\alpha = \Sigma (-1)^p \alpha^{(p)}.$$

Si P et $\bar{P}$ sont les *opérateurs différentiels de Dirac* sur les 2-spineurs définis par :

$$(2.3) \quad P\psi = \gamma^a \nabla_a \psi \quad \bar{P}\psi = -\nabla_{\bar{a}} \psi \gamma^{\bar{a}}$$

on vérifie aisément :

$$(2.4) \quad PS\alpha = S(d\alpha + \delta\alpha) \quad \bar{P}S\alpha = S v(d\alpha - \delta\alpha).$$

Il en résulte que les opérateurs P et $\bar{P}$ *commutent* et que l'on a :

THÉORÈME 2. — *Le laplacien $\Delta = P^2 = \bar{P}^2$ sur les 2-spineurs de type (1,1) est l'image par S du laplacien de G . de Rham sur les formes :*

$$\Delta S\alpha = S\Delta\alpha.$$

D'autre part B et $\bar{B}$ vérifient :

$$(2.5) \quad BP = -PB, \quad \bar{B}P = P\bar{B}, \quad B\bar{P} = \bar{P}B, \quad \bar{B}\bar{P} = -\bar{P}\bar{B}.$$

Posons :

$$M = \frac{1}{2}(P + \bar{P}) \quad N = \frac{1}{2}(P - \bar{P}).$$

On a $NM = MN = 0$ et $\Delta = M^2 + N^2$. De plus :

$$(2.6) \quad BM = -NB, \quad BN = -MB, \quad \bar{B}M = N\bar{B}, \quad \bar{B}N = M\bar{B}.$$

3. À tout opérateur de Chern $\mathcal{C}$ sur les formes correspond un opérateur — noté encore $\mathcal{C}$ — sur les éléments de $\varphi^{(2)}$

$$\mathcal{C}: \quad \psi_b^a \rightarrow C_b^a{}^r{}_s \psi_r^s$$

où C est un 4-spineur à dérivée covariante nulle. Des théorèmes 1 et 2, il résulte que $\mathcal{C}$ commute avec $\Delta = P^2$. Cherchons à quelle condition $\mathcal{C}$ commute avec P , il faut et il suffit que :

$$\gamma^a C_b^r = C_b^r \gamma^a,$$

donc que :

$$C_b^r = \varphi_b^r \delta_l^k.$$

Ainsi l'opérateur $\mathcal{C}$ est défini à partir de l'élément φ de $\varphi^{(2)}$ à dérivée covariante nulle par :

$$(3.1) \quad \mathcal{C}: \quad \psi \rightarrow \psi\varphi \quad (\nabla\varphi = 0).$$

Supposons que $\psi = S\alpha^{(p)}$, $\varphi = S\beta^{(q)}$ où $\alpha^{(p)}$ est une p -forme, $\beta^{(q)}$ une q -forme. On a :

$$(3.2) \quad (-1)^{pq} \psi \varphi = \sum_h (-1)^{(q-1)h + \left[\frac{h}{2}\right]} SK_h(\beta^{(q)} \alpha^{(p)})$$

où les $K_h(\beta^{(q)})$ sont des opérateurs associés à une q -forme $\beta^{(q)}$ et introduits antérieurement ⁽⁵⁾.

THÉORÈME 3. - *Sur une variété riemannienne V_{2n} admettant une structure spinorielle, les seuls opérateurs $\mathcal{C}$ sur $\varphi^{(2)}$ commutant avec P sont ceux définis par (3.1). Ils proviennent par S selon (3.2) des opérateurs $|K_h|$ associés à des formes à dérivée covariante nulle.*

4. Nous supposons dans la suite V_{2n} compacte et sa métrique elliptique. Un élément η de $\varphi^{(2)}$ est dit *harmonique* si $\Delta\eta = P^2\eta = 0$; η est l'image par S d'une forme harmonique, donc fermée et cofermée. De (2.4) il résulte que pour que η soit harmonique, il faut et il suffit que $P\eta = 0$.

D'après le théorème de Hodge-de Rham, toute forme α peut s'écrire

$$\alpha = \Delta\beta + \mu$$

où μ est une forme harmonique. On en déduit :

$$S\alpha = S\Delta\beta + S\mu = \Delta S\beta + S\mu = P(PS\beta) + S\mu.$$

On obtient aussi une traduction spinorielle de la décomposition de Hodge-de Rham.

THÉORÈME 4. - *Sur une variété proprement riemannienne compacte V_{2n} admettant une structure spinorielle, tout élément ψ de $\varphi^{(2)}$ admet une décomposition unique :*

$$\psi = P\chi + \varphi \quad (\chi, \varphi \in \varphi^{(2)} \text{ et } P\varphi = 0).$$

5. Sous les mêmes hypothèses, étudions l'espace E des solutions $\psi \in \varphi^{(2)}$ de

$$(5.1) \quad (\Delta - \varepsilon^2) \psi = 0 \quad (\varepsilon = \text{const.} \neq 0).$$

Toute solution de :

$$(5.2) \quad (P - \varepsilon) \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad (5.3) \quad (P + \varepsilon) \psi = 0$$

est solution de (5.1). D'après (2.5) les deux espaces E' et E'' de solutions de (5.2) ou (5.3) ont même dimension. De la considération de l'application

$$f: \quad \psi \in E \rightarrow f\psi = \frac{1}{2\varepsilon} (P + \varepsilon) \psi \in E'$$

(5)¹ LICHNEROWICZ, *Généralisation de la géométrie kählérienne*, « Coll. géom. diff. Louvain », pp. 677-679 (1951) et *Théorie globale des Connexions*, Cremonese, Roma 1955, pp. 198-199.

il résulte que $E = E' \oplus E''$. On a un résultat analogue en substituant $\bar{P}$ à P . Ces deux opérateurs commutant, on voit que E est somme directe de quatre sous-espaces $F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}, F^{(4)}$ correspondant aux solutions de :

$$(5.3) \quad \begin{cases} (F^{(1)})(M - \varepsilon) \psi = 0 & (F^{(2)})(N - \varepsilon) \psi = 0 \\ (F^{(3)})(M + \varepsilon) \psi = 0 & (F^{(4)})(N + \varepsilon) \psi = 0. \end{cases}$$

D'après (2.6) ces 4 espaces ont même dimension.

THÉORÈME 5. — *Sous les hypothèses du théorème 4, l'espace des solutions de $(\Delta - \varepsilon^2) \psi = 0$ est la somme directe des 4 sous-espaces $F^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) de même dimension définis par (5.3).* Ce résultat se traduit aisément en terme de formes.

6. — REMARQUE. — Des résultats analogues sont valables en dimension impaire $n = 2\nu + 1$. On sait qu'il existe un isomorphisme S entre le module des formes de degré $\leq \nu$ et $\varphi^{(2)}$. Pour une ν -forme :

$$PS\alpha^{(\nu)} = S\delta\alpha^{(\nu)} + \frac{(-1)^{\nu(\nu+1)/2}}{i^{\nu-1}} S * d\alpha^{(\nu)}.$$

On en déduit que le théorème 2 est encore valable ainsi que ses conséquences.