Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulio Calamai

Scattering di radiazione elettromagnetica prodotto da elettroni di elevata energia. Parte II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.3-4, p. 135–141.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_3-4_135_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Fisica. — *Scattering di radiazione elettromagnetica prodotto da elettroni di elevata energia.* Parte II [*] Nota di GIULIO CALAMAI, presentata dal Corrisp. G. RIGHINI.

5. POLARIZZAZIONE. – Dobbiamo adesso trovare per cos Θ una espressione più adatta alle applicazioni. A questo scopo notiamo anzitutto che la intensità totale di scattering può sempre riguardarsi come la somma di due componenti polarizzate ad angolo retto, che chiameremo risp. componente perpendicolare, con direzione di polarizzazione individuata dal versore $\boldsymbol{e}_{\perp}$, e componente parallela, con versore $\boldsymbol{e}_{\parallel}$. Per definire queste direzioni indichiamo con $\boldsymbol{e}_0$ il versore relativo alla direzione di polarizzazione incidente, e con $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}_0$ due vettori nelle direzioni di propagazione delle onde risp. diffusa ed origi-

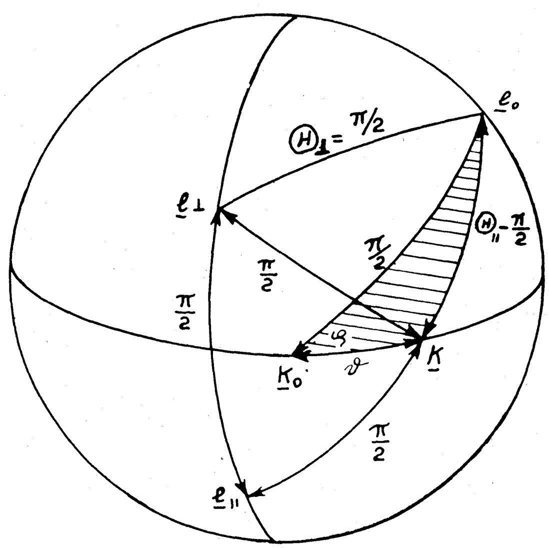

Fig. 2.

naria e con grandezze definite dalle (2,7). Dopo ciò chiameremo direzione $\boldsymbol{e}_{\perp}$, quella perpendicolare a $\boldsymbol{k}$ e alla direzione di polarizzazione originaria $\boldsymbol{e}_0$. Per questa componente è quindi $\Theta_{\perp} = \pi/2$ e perciò

$$\cos \Theta_{\perp} = 0. \tag{5,1}$$

L'altra componente deve allora essere polarizzata nella direzione $\boldsymbol{e}_{\parallel}$, perpendicolare a $\boldsymbol{k}$ e ad $\boldsymbol{e}_{\perp}$. Nella figura 2 queste direzioni sono riportate sulla sfera e si ottiene facilmente (colla considerazione del triangolo sferico tratteggiato):

$$\cos\left(\Theta_{\parallel} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \vartheta \cos \varphi \quad ; \quad \cos^2 \Theta_{\parallel} = 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \, ; \tag{5,2}$$

φ è l'angolo tra le giaciture $(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{l}_0)$ e $(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k})$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1962.

Facendo uso di (5,1) e (5,2), la (4,4) ci dà:

$$(5,3)\quad I_{\perp}=\frac{1}{4}\frac{e^4}{m^2c^4}\frac{I_0}{r^2}\left(\frac{k}{k_0}\right)^3\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2\sin^2\alpha)}\frac{(1-\beta a)}{(1-\beta a_0)}\left\{\frac{k_0(1-\beta a_0)}{k(1-\beta a)}+\frac{k(1-\beta a}{k_0(1-\beta a_0)}-2\right\}$$

$$(5,4)\quad I_{\parallel}=\frac{1}{4}\frac{e^4}{m^2c^4}\frac{I_0}{r^2}\left(\frac{k}{k_0}\right)^3\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2\sin^2\alpha)}\frac{(1-\beta a)}{(1-\beta a_0)}\left\{\frac{k_0(1-\beta a_0)}{k(1-\beta a)}+\right.$$

$$\left.+\frac{k(1-\beta a)}{k_0(1-\beta a_0)}-2+4\frac{(1-\sin^2\vartheta\cos^2\varphi)(1-\beta^2)^2}{(1-\beta a)^2(1-\beta a_0)^2}\right\}$$

ed

$$(5,5)\quad I=I_{\perp}+I_{\parallel}.$$

6. Approssimazione per un'onda originaria di bassa frequenza. – Supponiamo che sia:

$$(6,1)\quad \frac{k_0(1-\cos\vartheta)\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta a)}\ll mc^2.$$

Questa relazione sarà verificata per frequenze sufficientemente basse, anche se gli elettroni diffondenti hanno energie elevate. Sarà poi verificata in ogni caso per $1-\cos\vartheta\cong 0$, cioè per direzioni di scattering sufficientemente vicine alla direzione originaria.

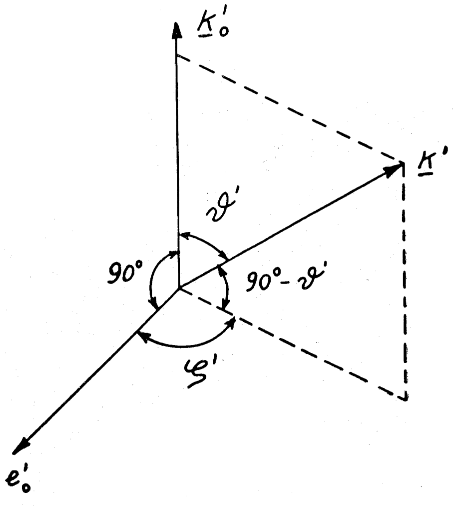

Fig. 3.

Come conseguenza della (6,1) la (4,3) diviene:

$$(6,2)\quad k=k_0\frac{(1-\beta a_0)}{(1-\beta a)}$$

cioè, come era prevedibile, il cambiamento di frequenza in questa approssimazione è dovuto al solo effetto Doppler. La (4,4) diviene poi:

$$(6,3)\quad I=\frac{e^4}{m^2c^4}\frac{I_0}{r^2}\cos^2\Theta\frac{(1-\beta^2)^3}{(1-\beta^2\sin^2\alpha)(1-\beta a)^4}$$

e quindi:

$$I_{\perp} = 0 \tag{6,4}$$

$$I_{\|} = \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{I_0}{r^2} \frac{(1-\beta^2)^3}{(1-\beta^2 \sin^2\alpha)(1-\beta a)^4} (1 - \sin^2 \cos^2 \varphi) . \tag{6,5}$$

Se la radiazione incidente è polarizzata, tale è anche la radiazione diffusa. Per radiazione originaria non polarizzata si sostituisce per $\cos^2 \varphi$ il suo valor medio $1/2$ e la (6,5) diviene:

$$I = \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{I_0}{r^2} \frac{(1-\beta^2)^3}{(1-\beta^2 \sin^2\alpha)(1-\beta a)^4} \frac{(1+\cos^2\vartheta)}{2} . \tag{6,6}$$

Per calcolare il flusso omnidirezionale di radiazione diffusa riferiamoci ad un sistema di coordinata polari (in Σ') avente l'asse nella direzione $\boldsymbol{k}'_0$. Introducendo un azimut contato da una giacitura arbitraria (per esempio dal piano $(\boldsymbol{k}'_0 , \boldsymbol{e}'_0)$, la energia W' diffusa per unità di tempo in tutte le direzioni è

$$W' = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} I' r'^2 \sin \vartheta' \, d\vartheta' \tag{6,7}$$

e cioè nella nostra approssimazione

$$W' = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} I'_0 \frac{e^4}{m^2 c^4} \sin \vartheta' \cos^2 \Theta' \, d\vartheta'. \tag{6,8}$$

Se si sostituisce nella (6,8) per $\cos^2 \Theta'$ il suo valor medio sulla sfera ($= 2/3$), si ottiene

$$W' = \frac{8}{3} \pi I'_0 \frac{e^4}{m^2 c^4} = \frac{2}{3} E'^2_0 \frac{e^4}{m^2 c^3} . \tag{6,9}$$

E poiché la energia irradiata per unità di tempo è un invariante relativistico [9], il resultato trovato vale anche in Σ'. Si ha quindi:

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \frac{E_0^2 (1-\beta a_0)^2}{(1-\beta^2)} . \tag{6,10}$$

Se adesso si fa la media di E_0^2 nel tempo si perviene alla formula (trasformata di quella di Thomson):

$$W = \frac{1}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \frac{(1-\beta a_0)^2}{(1-\beta^2)} \mathcal{E}_0^2 . \tag{6,11}$$

Si può anche procedere facendo uso della formula di Larmor, generalizzata relativisticamente da Schwinger [9]:

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{1}{(1-\beta^2)} \left\{ \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dU}{dt} \right)^2 \right\} \tag{6,12}$$

in cui p è l'impulso dell'elettrone ed $U = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ è la sua energia. Le equazioni relativistiche del moto dell'elettrone nel campo elettromagnetico dell'onda incidente si possono porre nella forma:

$$(6,13) \qquad \frac{dp_x}{dt} = e\,E_{ox} \quad ; \quad \frac{dp_y}{dt} = e\,(E_{oy} - \beta H_{oz}) \quad ; \quad \frac{dp_z}{dt} = e\,(E_{oz} + \beta H_{oy})$$

$$\frac{dU}{dt} = e E_x v$$

e quindi:

$$(6,14) \qquad \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 - \frac{1}{C^2}\left(\frac{dU}{dt}\right)^2 = e^2\, E_o^2\,(1 - \beta a_o)^2$$

per dedurre la quale abbiamo ancora fatto uso delle considerazioni con cui si sono dedotte le (3,7). Sostituendo nella (6,12) si ottiene la formula:

$$(6,15) \qquad W = \frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2 c^3}\frac{E}{(1-\beta^2)}(1 - \beta a_o)^2$$

che è identica alla (6,10). La coincidenza dei risultati è resa possibile dalle drastiche semplificazioni eseguite durante i calcoli. Essa però ha solo il significato di una verifica rudimentale dell'approssimazione usata, ed il valore trovato per W non influisce affatto sui successivi sviluppi.

7. Approssimazione per onda originaria di frequenza molto elevata (U. R). – Supponiamo adesso che sia invece

$$(7,1) \qquad mc^2 \ll \frac{k_0 (1 - \cos\vartheta)\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta a}.$$

In questa approssimazione la (4,1) diviene:

$$(7,2) \qquad k = \frac{mc^2 (1 - \beta a_0)}{(1 - \cos\vartheta)\sqrt{1-\beta^2}}.$$

La frequenza di scattering dipende, oltreché dalla velocità dell'elettrone, anche dagli angoli che la direzione della radiazione incidente forma con quella della radiazione diffusa e colla velocità. Non dipende però dalla frequenza originaria (effetto Compton U. R.).

Se $(1 - \cos\vartheta)$ non è troppo vicino a zero e β non è troppo vicino ad uno (condizioni queste implicitamente contenute nella 7,1), sarà:

$$(7,3) \qquad k \ll k_0$$

e la (4,4) nella presente approssimazione si può scrivere:

$$(7,3) \qquad \frac{1}{4} e^4 \frac{I_0}{r^2}\frac{1}{k_o^2}\frac{(1 - \beta a_0)^2}{(1 - \cos\vartheta)^2 (1 - \beta^2 \sin^2\alpha)}.$$

In questa espressione non compare traccia di polarizzazione, essendo stato trascurato il termine in $\cos^2\Theta$. Ciò significa che nel caso considerato di frequenze elevatissime è

$$(7,4) \qquad I_\perp = I_{\parallel}$$

e che la (7,3) rappresenta l'intensità di una di queste componenti. La formula definitiva per l'intensità totale deve essere scritta nella maniera seguente:

$$(7,5)\qquad I = I_{\perp} + I_{\parallel} = \frac{1}{2} e^4 \frac{I^0}{r^2} \frac{1}{k_0^2} \frac{(1 - \beta a_0)^2}{(1 - \cos\vartheta)^2 (1 - \beta^2 \sin^2\alpha)} .$$

La radiazione di scattering non è polarizzata anche se la originaria lo era. La intensità di scattering è poi funzione, oltre che delle grandezze da cui dipende k, anche dell'angolo fra la velocità e la direzione di scattering e (a differenza di quanto accadeva nella approssimazione precedente) anche della frequenza ν_0 originaria. La dipendenza dal moto dell'elettrone nella (7,5) è espressa dal fattore

$$(7,6)\qquad B(\beta, \alpha, \alpha_0) = \frac{(1 - \beta a_0)^2}{(1 - \beta^2 \sin^2\alpha)} .$$

Considerando la sola dipendenza da β, si trova:

$$\frac{\partial B}{\partial \beta} = \frac{2(1 - \beta a_0)(\beta \sin^2\alpha - a_0)}{(1 - \beta^2 \sin^2\alpha)^2} .$$

Quindi B è funzione crescente o decrescente di βa seconda che è:

$$(7,7)\qquad \beta \sin^2\alpha \gtrless a_0 .$$

8. INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI E CALCOLI NUMERICI PER LE BASSE FREQUENZE. – Un'analisi della (6,6), che è la formula che più interessa per i nostri scopi, porta alle seguenti conclusioni.

Quando l'elettrone è in quiete esiste la nota lieve anisotropia dipendente dall'angolo ϑ fra la direzione originaria e quella di scattering. Tale anisotropia è espressa dal fattore $\frac{1 + \cos^2\vartheta}{2}$ (variabile da 1/2 ad 1) che spesso viene trascurato col considerare isotropo lo scattering dell'elettrone. Quando invece l'elettrone è in movimento si crea una seconda anisotropia (che si compone colla prima) dipendente dall'angolo che la direzione di scattering forma colla velocità dell'elettrone. Tale anisotropia è espressa dal fattore f:

$$(8,1)\qquad f = \frac{(1 - \beta^2)^3}{(1 - \beta^2 \sin^2\alpha)(1 - \beta a)^4} .$$

Nella seguente tabella, a due entrate, il fattore f viene riportato in funzione di β e di α:

TABELLA I.

β \ α	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
0,5	6,75	2,77	0,56	0,14	0,083	0,14	0,56	2,77	6,75
0,9	68,6	0,66	0,036	0,0016	0,00053	0,0016	0,036	0,66	68,6

Dalla Tabella I e meglio ancora dal grafico (fig. 4) viene messa in evidenza la maniera di prodursi dello scattering. Se si prescinde, come spesso suol

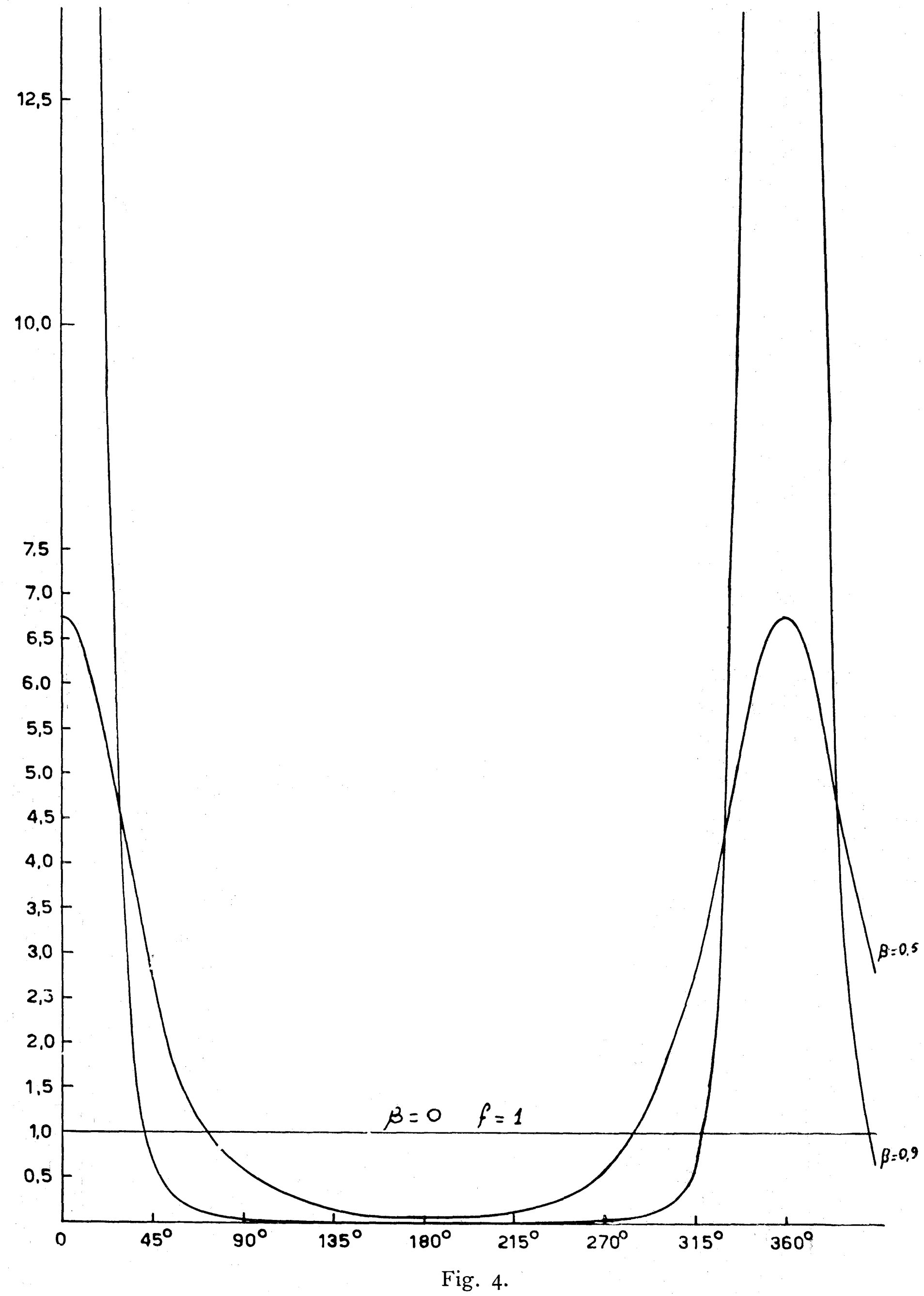

Fig. 4.

farsi, dal fattore $\frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2}$, che rappresenta una debole anisotropia rispetto alla direzione di incidenza, la radiazione diffusa, isotropa se l'elettrone è in quiete, si va concentrando attorno alla direzione della velocità dell'elettrone, man mano che β aumenta. In questa direzione la radiazione diffusa è molto più intensa di quella che si ha per l'elettrone in quiete, mentre nelle altre direzioni è invece notevolmente meno intensa e si può dire addirittura trascurabile per le alte energie. Questo comportamento ha delle analogie con quello della radiazione di sincrotrone, in cui la emissione è concentrata in un cono di piccola ampiezza attorno alla direzione della velocità. Naturalmente nel caso presente non viene emesso uno spettro continuo; la frequenza della radiazione di scattering è data dalla formula (6,2).

Ringrazio il prof. Giuliano Toraldo di Francia per avermi suggerito questo argomento ed averne resa possibile la trattazione con i suoi consigli e con molte discussioni. Ringrazio il prof. Guglielmo Righini, direttore dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, per il costante interessamento durante il lavoro e per i preziosi suggerimenti.

BIBLIOGRAFIA.

[9] J. SCHWINGER, *On the classical radiation of accelerated electrons*, « Physical Review », *75*, p. 1912 (1949).