Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mario Como

La piastra circolare volante e la piastra su tre appoggi puntiformi variamente caricata e problemi che ad esse si riferiscono. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.3-4, p. 131–134.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_3-4_131_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Meccanica. — *La piastra circolare volante e la piastra su tre appoggi puntiformi variamente caricata e problemi che ad esse si riferiscono.* Nota I [(*)] di MARIO COMO, presentata dal Socio G. KRALL.

1. Per un corpo elastico libero, in particolare per una piastra elastica libera (volante) priva di vincoli di cui qui ci si occupa, ha senso parlare di problema elastostatico solo e soltanto se le forze agenti costituiscono un sistema equilibrato. Lo spostamento trasversale w (P), di un punto P, provocato da una distribuzione di forze (secondo w) $w = w$ (P) si ha con una quadratura secondo la relazione

$$w(\mathrm{P}) = \int_{\Omega} \mathrm{G}(\mathrm{P}, \mathrm{P}')\, p(\mathrm{P}')\, d\Omega(\mathrm{P}') \tag{1}$$

G (P, P′) essendo la *funzione di influenza* o di Green: spostamento in P provocato da una forza puntuale 1 in P′. Poiché la forza 1 non è ovviamente equilibrata, occorre pensare la piastra vincolata, isostaticamente però, ad esempio con un incastro puntuale (un asse fisso calettato) o piuttosto con tre appoggi puntuali non allineati.

Le corrispondenti reazioni si calcolano con le equazioni cardinali della statica e G (P, P′) risulta così come deformata della lastra sotto l'azione di quattro forze parallele equilibrate: Q = 1 in P′ e le tre reazioni R_1, R_2, R_3 dei tre appoggi. Occorre appena dire che tali reazioni fanno il loro ruolo nella (1) ma alla fine, per l'equilibratezza di p scompaiono dal calcolo. Il problema riguardante la determinazione di G si sa risolvere poiché la soluzione singolare per la forza puntuale, che è poi la soluzione fondamentale dell'equazione $\Delta\Delta w = 0$, è notissima. Si ha allora una combinazione lineare delle singolarità di cui occorre annullare gli sforzi corrispondenti al contorno, che è *libero*. Concettualmente almeno, basta sovrapporre una soluzione regolare dell'equazione omogenea, soluzione corrispondente alla distribuzione opposta di sforzi al contorno. Naturalmente, salvo casi particolari, non è da pensare di cercare G quando occorre la deformata conseguente al necessariamente equilibrato carico $p = p$ (P′), soddisfacente dunque, con x, y assi nel piano mediano, alle condizioni

$$\int_{\Omega} p\,d\Omega = 0 \quad , \quad \int_{\Omega} px\,d\Omega = 0 \quad , \quad \int_{\Omega} py\,d\Omega = 0 \,. \tag{2}$$

Ma la (1) serve comunque, come subito vedremo, almeno simbolicamente, per risolvere il problema staticamente elementare che essa compendia

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1962.

e tutta una serie di problemi per i quali $p = p(\mathrm{P})$ anziché funzione nota è funzione della w stessa sicché al problema della quadratura si sostituisce quello della soluzione di una equazione funzionale.

Ciò posto, sia dunque p esprimibile come combinazione lineare a coefficienti costanti π_m di N funzioni $\varphi_m = \varphi_m(\mathrm{P})$,

$$p(\mathrm{P}) = \sum_{1}^{\mathrm{N}}{}_{i}\, \pi_m \varphi_m(\mathrm{P}) \,. \tag{3}$$

Le φ_m caratterizzino distribuzioni di carico per le quali si sa, per ognuna, calcolare, in regime di vincolo isostatico, la corrispondente deformata,

$$w_m(\mathrm{P}) = \int_{\Omega} \mathrm{G}(\mathrm{P}, \mathrm{P}')\, \varphi_m(\mathrm{P}')\, d\Omega(\mathrm{P}') \tag{4}$$

senza che occorra conoscere la G. La w sarà data, in conformità con la (1) da

$$w(\mathrm{P}) = \sum_{1}^{\mathrm{N}}{}_{m}\, \pi_m w_m(\mathrm{P}) \,. \tag{1'}$$

Le φ_m, singolarmente, non occorre che sieno equilibrate bastando imporre ai coefficienti π_m le condizioni che seguono dalle (2)

$$\Sigma_m \pi_m \int_{\Omega} \varphi_m \, d\Omega = \int_{\Omega} p d\Omega = 0 \quad ; \quad \Sigma_m \pi_m \int_{\Omega} \varphi_m x d\Omega = \int_{\Omega} p x d\Omega = 0 \, ; \tag{2'}$$

$$\Sigma_m \pi_m \int_{\Omega} \varphi_m y d\Omega = \int_{\Omega} p y d\Omega = 0 \,.$$

Poiché i vincoli sono isostatici, i tre appoggi ad esempio, le (2′) assicurano che le reazioni per $p = p(\mathrm{P})$ secondo la (3) saranno tutte nulle e che, pertanto, fatto singolarmente per ogni w_m il loro ruolo (per il calcolo delle w_m secondo la (4)), esse, sommandosi, escono effettivamente dalla scena del calcolo.

Se la piastra che si considera è circolare e il carico p ha simmetria assiale le φ_m avranno anche simmetria assiale e per esse non occorre neanche considerare i tre appoggi e ci si può riferire al bordo semplicemente ed uniformemente appoggiato. Le reazioni globali del bordo stesso risulteranno senz'altro nulle se le φ_m assialsimmetriche soddisfano l'unica condizione di equilibratezza:

$$\sum_{1}^{\mathrm{N}} \pi_m \int_{\Omega} \varphi_m \, d\Omega = \int_{\Omega} p d\Omega = 0 \,.$$

Diciamo appena che, per delle φ_m del tipo

$$\varphi_m = \mathrm{P}_m \left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^{m-1}$$

r essendo una delle coordinate polari, R il raggio, se B è la flessorigidezza, si ha

$$w_m(r) = \frac{p_m R^4}{B} \frac{\rho^4}{(m+2)^2 (m+4)^2} \qquad \left(\rho = \frac{r}{R}\right)$$

e la reazione uniforme sul bordo circolare esterno è

$$q_m = \frac{p_m R}{2(m+1)\pi} .$$

Sicché una combinazione di N funzioni del tipo w_m, $m = 1, 2, \cdots N$, dovrà soddisfare all'unica condizione di equilibratezza:

$$\sum_1^N \frac{p_m}{m+1} = 0 .$$

Per carichi non assialsimmetrici, non resta che ricorrere ai tre appoggi. E qui vogliamo considerare per la piastra circolare su tre appoggi le condizioni di carico emisimmetriche

$$p(r, \theta) = p_m \rho^m \cos \theta .$$

2. Con riferimento ad un sistema di coordinate polari e nel caso dello spessore costante l'equazione classica per la deformata trasversale w di una piastra elastica soggetta ad un carico p secondo w si scrive

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = \frac{p(r, \theta)}{B} . \tag{5}$$

La $w(r, \theta)$ soluzione della (5), si può scrivere nella forma:

$$w(r, \theta) = w_0(r, \theta) + w_1(r, \theta) \tag{6}$$

con $w_0(r, \theta)$ integrale particolare della (1) e $w_1(r, \theta)$ integrale generale dell'omogenea associata.

Nel caso della piastra su appoggi puntiformi, se per $w_0(r, \theta)$ si assume la deformata ormai classicamente nota, corrispondente al carico $p(r, \theta)$ della piastra appoggiata lungo tutto il contorno (condizione (*o*)), la soluzione del problema è ricondotta alla determinazione della deformata $w_1(r, \theta)$ della piastra appoggiata su punti, priva di carico in tutto il dominio ma caricata al bordo (condizione (1)) dalla reazione, cambiata di segno, della condizione (o).

L'integrale generale $w_1(r, \theta)$ è fornito da:

$$w_1(r, \theta) = A_0 + B_0 r^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + C_m r^{m+2}) \cos m\theta + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m r^m + C'_m r^{m+2}) \sin m\theta . \tag{7}$$

Inoltre se N_k è la reazione concentrata del generico appoggio k, essa è rappresentabile con la serie:

$$\frac{N_k}{\pi R}\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\cos m\theta_k\right) \tag{8}$$

dove è:

$$\theta_k = \theta - \gamma_k$$

essendo γ_k l'angolo che definisce la posizione del generico appoggio k (fig. 1).

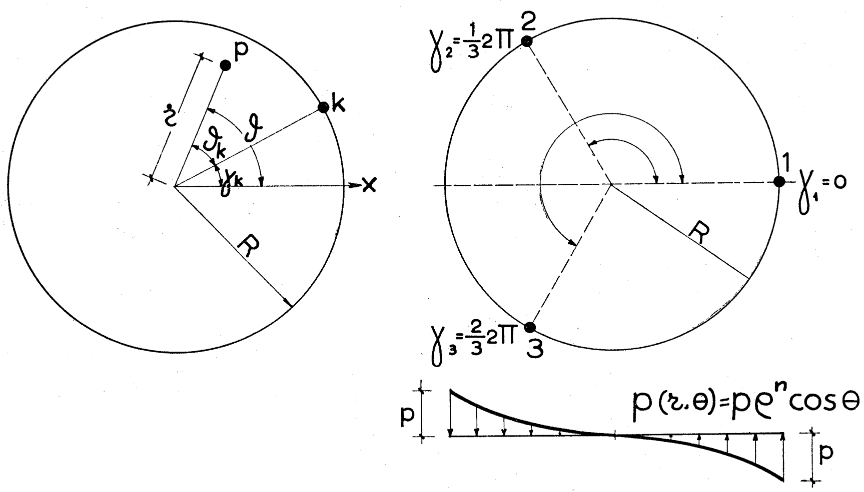

Fig. 1.

Le costanti incognite che figurano nella (7) vengono determinate con l'imporre le condizioni al contorno:

$$(M_r)_{r=R} = 0 \tag{9}$$

$$(V_r)_{r=R} = -(V_0)_{r=R} + \sum_{k=1}^{3}\frac{N_k}{\pi R}\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\cos m\theta_k\right) \tag{9'}$$

ove $(V_0)_{r=R}$ rappresenta la reazione per la piastra circolare nella condizione (0).

In una Nota II applicheremo queste considerazioni al caso dei 3 appoggi (distanziati di 120°) sul bordo e daremo esaurienti tabellazioni per le soluzioni trovate in talune importanti condizioni di carico $\varphi = \varphi_m$ per le (3) delle premesse.

BIBLIOGRAFIA.

K. GIRKMANN, *Flachentragwerke*, Wien 1956.

G. KRALL, « *Piastre* », *Manuale dell'ingegnere civile* – Cremonese, Roma 1960.

A. NÁDAI, *Elastische Platten*, Berlin 1925.

S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of plates and shells*, Mc. Graw Hill, 1959.