Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Ario Romiti

## Le condizioni sufficienti per la stabilità asintotica in grande di una classe di sistemi non lineari di regolazione automatica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **33** (1962), n.3-4, p. 125–130.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_3-4_125_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

**Meccanica.** — *Le condizioni sufficienti per la stabilità asintotica in grande di una classe di sistemi non lineari di regolazione automatica.* Nota (*) di ARIO ROMITI, presentata dal Corrisp. C. FERRARI.

1. INTRODUZIONE. – In questo lavoro sono state determinate condizioni sufficienti di stabilità per sistemi di regolazione aventi un elemento non lineare. Il metodo generale sfruttato a questo scopo è descritto in una precedente Nota in questi «Rendiconti» [1]. Le condizioni sono espresse mediante ineguaglianze in cui compaiono unicamente i coefficienti della funzione di trasferta della parte lineare del sistema di regolazione. Quando il numero delle equazioni del primo ordine che descrivono il sistema è abbastanza piccolo, le condizioni di stabilità risultano esplicite e semplici. Se tale numero è invece comunque grande, un metodo qui indicato permette sempre di risolvere il problema.

Nel presente studio sono anche stati effettuati confronti tra le condizioni sufficienti di stabilità ottenute, e le condizioni necessarie e sufficienti valide per lo stesso sistema di regolazione, in cui la parte non lineare venga sostituita con un elemento lineare.

Poiché l'elemento non lineare dei servomeccanismi qui esaminati è di un tipo molto generale, non meglio precisato che dall'uguaglianza di segno tra i segnali entranti e quelli uscenti, è evidente che la regione di stabilità nello spazio dei parametri che si ottiene non può, altro che in casi particolari, coincidere completamente con l'effettivo dominio di stabilità, ma è sempre in esso contenuto; appare quindi utile qualche controllo delle differenze.

Un altro confronto è stato qui fatto con le condizioni di stabilità locale dei sistemi di regolazione non lineari a relé, note dai lavori di Tsypkin [2], e rigorosamente dimostrate da Kinyapin e Neimark [3] ed Anosov [4].

2. LE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA STABILITÀ ASINTOTICA ESPRESSE MEDIANTE I COEFFICIENTI DELLA FUNZIONE DI TRASFERTA DELLA PARTE LINEARE. – La funzione di trasferta della parte lineare del sistema di regolazione in esame sia:

$$\mathrm{W}(p) = \frac{b_n p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \cdots + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_1} . \tag{1}$$

Perché il sistema sia asintoticamente stabile in grande, è sufficiente che siano validi due requisiti, e cioè che:

(*) Pervenuta all'Accademia il 27 settembre 1962.

1° la sua parte lineare sia autonomamente stabile, in modo che siano negative tutte le parti reali delle radici del determinante caratteristico del sistema di equazioni che lo descrive;

2° un certo gruppo di equazioni algebriche di secondo grado abbia soluzioni tutte reali.

Il primo requisito, per il criterio di Hurwitz, è esprimibile mediante le condizioni:

$$a_n > 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0 \tag{2}$$

eccetera.

Il secondo requisito è soddisfatto quando si ha un gruppo di soluzioni $z$ tutte reali per le equazioni algebriche che si ottengono da [1], formule (5), (6), (20), (21), (26), (27):

$$\begin{gathered} -2\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s \sum_{i=1}^{n} z_i\,\bar{\sigma}_{2k-s+n-i} \sum_{j=1}^{n} z_j\,\bar{\sigma}_{s+n-j} - \\ -(-1)^k\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\,\bar{\sigma}_{k+n-i}\right)^2 + \sum_{s=1}^{n} b_s\,\bar{\sigma}_{2k+s} = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} -2\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s \sum_{i=1}^{n} z_i\,\bar{\sigma}_{-2k+s-1+n-i} \sum_{j=1}^{n} z_j\,\bar{\sigma}_{-s-1+n-j} - \\ -(-1)^k\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\,\bar{\sigma}_{-k-1+n-i}\right)^2 + \sum_{s=1}^{n} b_s\,\bar{\sigma}_{s-2k-2} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Di tali equazioni se ne debbono considerare $n$, ottenute facendo variare il numero intero $k$.

Si ha così, per $k = 0$:

$$z_1^2 = \sum_{s=1}^{n} b_s\,\bar{\sigma}_s \tag{5}$$

$$z_n^2 = -\frac{1}{\bar{\sigma}_{-1}^2} \sum_{s=1}^{n} b_s\,\bar{\sigma}_{s-2} \tag{6}$$

per $k = 1$:

$$z_2^2 - 2\,z_1\,z_3 = z_1^2\,(2\,\bar{\sigma}_{n+1} - \bar{\sigma}_n^2) - \sum_{s=1}^{n} b_s\,\bar{\sigma}_{s+2} \tag{7}$$

$$z_{n-1}^2 - 2\,z_n\,z_{n-2} = \frac{z_n^2}{\bar{\sigma}_{-1}^2}(2\,\bar{\sigma}_{-1}\,\bar{\sigma}_{-3} - \bar{\sigma}_{-2}^2) - \frac{1}{\bar{\sigma}_{-1}^2}\sum_{s=1}^{n} b_s\,\bar{\sigma}_{s-4} \tag{8}$$

eccetera.

Perché le $z$ siano tutte reali, dalle (5) e (6) si ha intanto che devono essere sempre soddisfatte le:

$$\sum_{s=1}^{n} b_s\,\bar{\sigma}_s > 0\,; \tag{5'}$$

$$\sum_{s=1}^{n} b_s\,\bar{\sigma}_{s-2} > 0\,. \tag{6'}$$

Tenendo ora conto del valore dei coefficienti $\bar{\sigma}$, dati dalle (20), (21) di [1], le condizioni sufficienti per la stabilità asintotica si ottengono come segue:

per $n = 1$, si ricava dalla prima delle (2) e dalla (5'):

$$a_1 > 0 \quad ; \quad b_1 < 0; \tag{9}$$

Per $n = 2$, si ricava dalle (2) e dalle (5'), (6'):

$$a_1 > 0 \quad ; \quad a_2 > 0 \quad ; \quad b_1 < 0 \quad ; \quad b_1 - b_2 a_2 > 0 \tag{10}$$

e quindi anche:

$$b_2 < 0;$$

per $n = 3$, si ricava dalle (2) e dalle (5'), (6') e (7):

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 > 0 \quad ; \quad a_3 > 0 \quad ; \quad a_2 a_3 - a_1 > 0 \quad ; \quad a_2 > 0 \\ b_1 < 0 \quad ; \quad b_2 - b_3 a_3 > 0; \\ 2\sqrt{a_1 b_1 (b_3 a_3 - b_2)} - b_2 a_2 + b_1 a_3 + b_3 a_1 > 0 \end{array}\right. \tag{11}$$

da cui anche:

$$b_2 < 0 \quad ; \quad b_3 < 0;$$

per $n = 4$ occorre, oltre alle precedenti, considerare anche l'equazione (8). Si ricava:

$$\left\{\begin{array}{l} a_4 > 0 \quad ; \quad a_3 > 0 \quad ; \quad a_2 > 0 \quad ; \quad a_4 a_3 - a_2 > 0 \\ a_4 (a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_2^2 > 0 \quad ; \quad a_1 > 0 \\ b_3 - b_4 a_4 > 0 \quad ; \quad b_1 < 0 \end{array}\right. \tag{12}$$

ed inoltre:

$$b_2 a_4 + b_4 a_2 - b_3 a_3 - b_1 > 0$$

$$b_1 a_3 + b_3 a_1 - b_2 a_2 > 0.$$

Se una delle due ultime condizioni, od entrambe, non sono verificate, la stabilità può ancora essere assicurata se è soddisfatta la relazione:

$$M^3 + N^3 - \frac{1}{4} M^2 N^2 - \frac{9}{2} M N + \frac{27}{4} > 0$$

con:

$$M = \frac{b_2 a_4 + b_4 a_2 - b_3 a_3 - b_1}{\sqrt[3]{(b_3 - b_4 a_4)^2 (-b_1 a_1)}}$$

$$N = \frac{b_1 a_3 + b_3 a_1 - b_2 a_2}{\sqrt[3]{(b_3 - b_4 a_4)(b_1 a_1)^2}}.$$

Quando il valore di $n$ aumenta, le condizioni di stabilità divengono sempre più complicate.

È però possibile, anche per $n$ comunque grande, verificare la stabilità del servomeccanismo, usufruendo di un metodo generale.

Si può facilmente osservare che le equazioni nelle incognite $z_i$ sono riducibili, mediante semplici operazioni di sostituzione, ad equazioni in una sola delle $z_i$, quando $n$ è non superiore a sei.

Quando $n$ è superiore a sei, per arrivare al medesimo risultato si può sempre applicare il metodo del risultante algebrico.

Una volta ottenute le equazioni in una sola incognita, per accertarsi che questa sia reale si può ricorrere al metodo di Sturm, opportunamente adattato al nostro caso.

Se $F_0 = 0$ è l'equazione (sempre di grado pari), ottenuta nell'incognita $z_i$, ed $F_1$ è la derivata di $F_0$ rispetto a $z_i$, la successione di Sturm corrispondente è data da:

$$F_0 = q_1 F_1 - F_2 \quad ; \quad F_1 = q_2 F_2 - F_3 \quad ; \quad F_{k-2} = q_{k-1} F_{k-1} - F_k$$

eccetera; $q_{k-1}$ è il quoziente della divisione di $F_{k-2}$ per $F_{k-1}$, e $-F_k$ è il resto.

L'incognita $z_i$ ha almeno due radici reali quando, se si considera, per ciascuna $F_k$, il segno del coefficiente del solo termine di grado più elevato, le variazioni di segno della successione sono minori delle variazioni che si hanno quando si cambia il segno a quei termini il cui grado è dispari.

3. Confronto dei risultati con alcune soluzioni particolari note. - Nei sistemi di regolazione che si sono considerati nel presente studio, i segnali di ingresso $x$ e di uscita $f(x)$ dell'elemento non lineare sono anche rispettivamente segnali di uscita e di ingresso per la parte lineare.

Si ha quindi:

$$W(p) = \frac{x}{f(x)} \cdot$$

Tali sistemi di regolazione comprendono ovviamente anche quelli completamente lineari.

Quest'ultimo caso è considerato quando si pone $f(x) = kx$, e quindi:

$$W(p) = \frac{1}{k} \qquad (k \text{ costante positiva}).$$

Dalla (1) si ottiene allora:

$$\frac{[p^n + (a_n - kb_n)\, p^{n-1} + (a_{n-1} - kb_{n-1})\, p^{n-2} + \cdots + (a_1 - kb_1)]}{[p^n + a_n\, p^{n-1} + a_{n-1}\, p^{n-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_1]} = 0 . \tag{13}$$

In analogia a quanto fatto per i sistemi non lineari, si considera una funzione di trasferta $W(p)$ autonomamente stabile.

Le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità sono quindi fornite dal criterio di Hurwitz applicato sia al numeratore che al denominatore di (13); valgono allora le (2) ed inoltre:

$$a_n - kb_n > 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_n - kb_n & a_{n-2} - kb_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} - kb_{n-1} \end{vmatrix} > 0; \tag{14}$$

eccetera.

Queste condizioni sono naturalmente meno restrittive delle condizioni sufficienti che, nel paragrafo precedente, sono state determinate per il caso generale non lineare. In particolare per il sistema lineare si ricava:

per $n = 1$, $\frac{b_1}{a_1} < \frac{1}{k}$, mentre dalle (9) si aveva:

$$\frac{b_1}{a_1} < 0;$$

per $n = 2$, per il sistema lineare si ha:

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{1}{k} \quad ; \quad \frac{b_2}{a_2} < \frac{1}{k}$$

mentre dalle (10) si aveva:

$$\frac{b_1}{a_1} < 0 \quad ; \quad \frac{b_2}{a_2} < 0 \quad ; \quad b_1 - b_2 a_2 > 0.$$

Per i sistemi di ordine superiore i risultati del confronto sono meno immediatamente espressivi.

Consideriamo ora un sistema di regolazione non lineare che resta compreso nella trattazione svolta, e che ha già costituito l'oggetto di numerosi studi; quello cioè il cui elemento non lineare è un relé.

Per sistemi di tal genere sono conosciute le condizioni di stabilità della posizione di equilibrio (stabilità in piccolo), quando il relé sia supposto agire senza intervallo morto e senza ritardo (ved. [2], [3], [4]).

Il segnale uscente dall'elemento non lineare è in questo caso:

$$f(x) = k \operatorname{sign} x$$

Le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità locale, ovviamente meno restrittive delle condizioni sufficienti per la stabilità asintotica in grande, sone le seguenti:

1° il numeratore della funzione di trasferta (1) deve essere stabile;

2° la differenza tra i gradi del denominatore e del numeratore della funzione di trasferta (1) non deve essere superiore a due;

3° se tale differenza è uguale ad uno, deve essere $b_n < 0$;

4° se tale differenza è uguale a due ($b_n = 0$), deve essere:

$$b_{n-1} < 0 \quad ; \quad b_{n-2} - b_{n-1} a_n > 0.$$

Ora, secondo i risultati acquisiti nel presente lavoro, si ha certamente stabilità asintotica in grande quando, oltre ad essere soddisfatta la prima condizione, lo sono anche le altre qui elencate:

se $b_n \neq 0$, per $n = 1$ la condizione è $b_n = b_1 < 0$, $a_1 > 0$ come per la stabilità in piccolo; per $n > 1$, oltre a questa, si hanno le condizioni supplementari, date dalle (10), (11) e successive;

se $b_n = 0$, $b_{n-1} \neq 0$, per $n = 2$ si hanno le condizioni incompatibili $b_1 > 0$, $b_1 < 0$; l'incompatibilità delle condizioni si verifica pure per $n > 2$;

se $b_n = 0$ , $b_{n-1} = 0$, per $n = 3$ si ha $b_1 < 0$, e $b_1\, a_3 > 0$; queste due espressioni, essendo $a_3 > 0$, sono incompatibili; perciò le condizioni di stabilità in grande non sono soddisfatte (così come per la stabilità in piccolo). A maggior ragione ciò si verifica per $n > 3$.

## BIBLIOGRAFIA.

[1] A. ROMITI, *Sulla stabilità asintotica in grande di una classe di sistemi non lineari di regolazione automatica*, « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », agosto (1962).

[2] YA. S. TSYPKIN, *Teoria dei sistemi di regolazione automatica a relé*, trad. tedesca, Oldenbourg (1958).

[3] S. D. KINYAPIN, YU. I. NEIMARK, *Sulla stabilità dello stato di equilibrio dei sistemi a relé*, « Avtomatika i Telemekhanika », *1* (1957).

[4] D. V. ANOSOV, *Sulla stabilità della posizione di equilibrio dei sistemi a relé*, « Avtomatika i Telemekhanika », *2* (1959).