Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulio Calamai

Scattering di radiazione elettromagnetica prodotto da elettroni di elevata energia. Parte I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.1-2, p. 66–71.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_1-2_66_0¿

Fisica. — *Scattering di radiazione elettromagnetica prodotto da elettroni di elevata energia.* Parte I. Nota (*) di GIULIO CALAMAI, presentata dal Corrisp. G. RIGHINI.

1. Lo scattering dovuto agli elettroni ha una importanza notevole in vari fondamentali fenomeni di Astrofisica [1]. Esso contribuisce ad esempio in maniera essenziale alla formazione dello spettro continuo nelle stelle dei tipi O, B e Wolf–Rayet e in generale in tutte le stelle con atmosfere ad una temperatura superiore ai 15.000° K. Nello studio della costituzione interna delle stelle si devono ammettere come cause determinanti della opacità del materiale stellare i fenomeni di foto–ionizzazione dei metalli e lo scattering degli elettroni; ma alle temperature superiori ai 10^8 K l'assorbimento è interamente dovuto a questa ultima causa. E infine gli elettroni si trovano diffusi in tutto lo spazio per dare un contributo all'assorbimento interstellare, anche se da soli non sarebbero in grado di fornire una spiegazione di questo fenomeno.

In tutte queste teorie si fa uso di una sezione totale di scattering data dalla formula di Thomson:

$$s_e = \frac{8}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \tag{1,1}$$

e quindi costante ed isotropa. La deduzione della (1,1) viene fatta supponendo l'elettrone in quiete.

Ma in taluni casi la ipotesi dell'elettrone fermo non è senz'altro accettabile. Per riferirsi come esempio ad un fenomeno molto attuale, ci si può domandare quale influenza possa avere sullo scattering il moto dei centri di diffusione nelle fasce di van Allen [2], dove elettroni di elevate energie sono spiralizzati attorno alle linee del campo magnetico terrestre.

In vista di alcune applicazioni vogliamo analizzare la questione generale nel presente lavoro.

2. SISTEMA DI RIFERIMENTO. – Punto di partenza per la nostra ricerca saranno le formole di Klein–Nishina [3] e di Compton [4], applicabili in un sistema di riferimento Σ' in cui l'elettrone è in quiete. Se la velocità dell'elettrone rispetto all'osservatore è $\boldsymbol{v}$, considereremo poi un sistema Σ mobile rispetto a Σ' con velocità $-\boldsymbol{v}$. In Σ è in quiete l'osservatore, mentre la velocità dell'elettrone è appunto $\boldsymbol{v}$. Il nostro procedimento consisterà nel passare, mediante una trasformazione di Lorentz, dal sistema Σ al sistema Σ' nel quale l'elettrone diffonde in maniera nota. La trasformazione di Lorentz inversa della precedente ci permetterà poi di esprimere la legge dello scattering in Σ. Le formule che così troveremo sono valide per il caso di un elettrone mobile

(*) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1962.

di moto rettilineo ed uniforme, poiché la trasformazione di Lorentz si applica correttamente per tale moto. Ma i risultati saranno applicabili, almeno approssimativamente, ad altri tipi di moto, come per esempio quello dell'elettrone in un campo magnetico.

Supponiamo dunque che nel sistema Σ di assi coordinati x, y, z, con versori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, in cui l'osservatore è in quiete, vi sia un elettrone con velocità

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}v \tag{2,1}$$

ed un'onda elettromagnetica, piana e monocromatica, avente una lunghezza d'onda λ_0 ed una frequenza ν_0 e propagantesi in una direzione individuata dai coseni di direzione a_0, b_0, c_0. Le componenti del campo elettromagnetico avranno le espressioni:

$$\left\{\begin{aligned} E_{0x} &= \mathcal{E}_{0x} \cos 2\pi\left(\nu_0 t - \frac{a_0 x + b_0 y + c_0 z}{\lambda_0}\right) \\ E_{0y} &= \mathcal{E}_{0y} \cos 2\pi\left(\nu_0 t - \frac{a_0 x + b_0 y + c_0 z}{\lambda_0}\right) \\ E_{0z} &= \mathcal{E}_{0z} \cos 2\pi\left(\nu_0 t - \frac{a_0 x + b_0 y + c_0 z}{\lambda_0}\right) \end{aligned}\right. \tag{2,2}$$

$$\left\{\begin{aligned} H_{0x} &= \mathcal{H}_{0x} \cos 2\pi\left(\nu_0 t - \frac{a_0 x + b_0 y + c_0 z}{\lambda_0}\right) \\ H_{0y} &= \mathcal{H}_{0y} \cos 2\pi\left(\nu_0 t - \frac{a_0 x + b_0 y + c_0 z}{\lambda_0}\right) \\ H_{0z} &= \mathcal{H}_{0z} \cos 2\pi\left(\nu_0 t - \frac{a_0 x + b_0 y + c_0 z}{\lambda_0}\right) \end{aligned}\right. \tag{2,3}$$

Abbiamo detto che il sistema Σ' avente assi coordinati x', y', z', paralleli ad x, y, z, si muove rispetto a Σ con velocità $\boldsymbol{v}$. Supponiamo in più che la posizione relativa dei due sistemi sia tale che al tempo $t = 0$ (in Σ) gli assi x, y, z, coincidano cogli assi x', y', z'.

Per indicare i valori di una qualsiasi grandezza misurata in Σ', useremo gli stessi simboli con i quali quella grandezza è stata indicata in Σ, affetti però da un apice. In Σ' sarà così:

$$v' = 0 \tag{2,4}$$

$$E'_{0x} = E_{0x} \quad ; \quad E'_{0y} = \frac{E_{0y} - \beta H_{0z}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad E'_{0z} = \frac{E_{0z} + \beta H_{0y}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2,5}$$

$$H'_{0x} = H_{0x} \quad ; \quad H'_{0y} = \frac{H_{0y} + E_{0z}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad H'_{0z} = \frac{H_{0z} - E_{0y}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2,6}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (c = \text{velocità della luce}).$$

Ponendo:

$$\left\{\begin{aligned} h\nu'_0 &= \hbar\, 2\pi\nu'_0 = \hbar\,\omega'_0 = k'_0 \\ h\nu' &= \hbar\, 2\pi\nu' = \hbar\,\omega' = k' \end{aligned}\right. \tag{2,7}$$

si ha anzitutto la formula di Compton [4] per la frequenza $\nu' = k'/h$ della radiazione diffusa in una direzione formante (in Σ') un angolo ϑ' con quella della radiazione originaria:

$$k' = \frac{k_0' mc^2}{mc^2 + k_0'(1 - \cos\vartheta')} \tag{2,8}$$

(m = massa dell'elettrone in quiete).

Il vettore di Poynting I' per questa direzione di scattering si può calcolare mediante la formula di Klein–Nishina [3]:

$$I' = \frac{I_0'}{r'^2}\frac{k'^3}{k_0'^3}\frac{1}{4}\frac{e^4}{m^2c^4}\left[\frac{k_0'}{k'} + \frac{k'}{k_0'} - 2 + 4\cos^2\Theta'\right], \tag{2,9}$$

nella quale è:

I_0' = modulo del vettore di Poynting per la radiazione originaria;
r' = distanza fra elettrone ed osservatore;
Θ = angolo fra la direzione di polarizzazione dell'onda originaria e quella dell'onda diffusa.

Le formule (2,8) e (2,9) sono valide nel sistema Σ'. Per ottenere le formule che descrivono lo scattering di un elettrone in moto rispetto all'osservatore, bisogna, secondo quello che abbiamo detto sopra, applicare una trasformazione di Lorentz.

3. Passaggio al sistema dell'osservatore. – Applichiamo adesso la trasformazione di Lorentz da Σ' a Σ:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3,1}$$

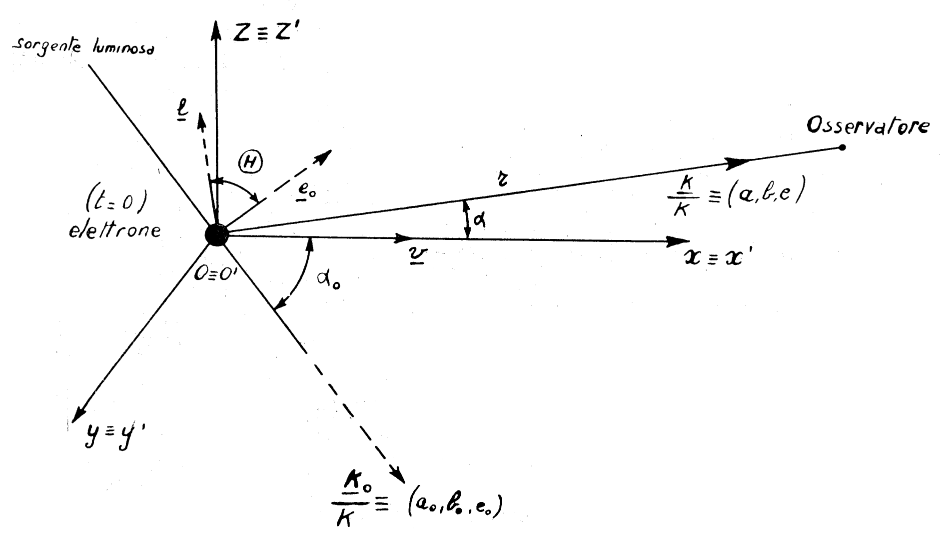

Fig. 1.

Per r' si ottiene:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2)}{1 - \beta^2}.$$

Se a, b, c, sono i coseni della direzione di r (e quindi i coseni della direzione di scattering in Σ), si ha

$$x = ra \quad ; \quad y = rb \quad ; \quad z = rc$$

e quindi:

$$r'^2 = r^2 \frac{\left(1 - \frac{2avt}{r} + \frac{v^2 t^2}{r^2} - \beta^2 \sin^2 \alpha\right)}{(1 - \beta^2)} \tag{3,2 bis}$$

essendo $\alpha = \arccos a$ l'angolo che la direzione di scattering forma colla velocità. Essendo arbitraria la scelta dell'origine del sistema di coordinate, possiamo supporre, senza alterare le generalità, che nell'istante, in cui si osserva, l'elettrone si trovi nell'origine di Σ' e che le coordinate dell'osservatore sieno x', y', z'. La formula trovata, se l'istante considerato è $t = 0 \left(t' = \frac{-\beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)$ diviene:

$$r'^2 = r^2 \frac{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)}{(1 - \beta^2)}. \tag{3,2}$$

Per trasformare k' e k'_0, o, ciò che è lo stesso, ν' e ν'_0, basta applicare le formule di Einstein [5] per l'effetto Doppler:

$$k' = k \frac{(1 - \beta a)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad k'_0 = k_0 \frac{(1 - \beta a_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{3,3}$$

Per la trasformazione di $\cos \vartheta$ (ϑ = angolo fra la direzione originaria e quella di scattering) occorre usare le formule di Einstein [5] per la aberrazione della luce:

$$a' = \frac{a - \beta}{1 - \beta a} \quad ; \quad b' = b \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta a} \quad ; \quad c' = c \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta a} \tag{3,4}$$

$$a'_0 = \frac{a_0 - \beta}{1 - \beta a_0} \quad ; \quad b'_0 = b_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta a_0} \quad ; \quad c'_0 = c_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta a_0} \tag{3,5}$$

e si ottiene:

$$\cos \vartheta' = a' a'_0 + b' b'_0 + c' c'_0 = \frac{(a - \beta)(a_0 - \beta) + (bb_0 + cc_0)(1 - \beta^2)}{(1 - \beta a)(1 - \beta a_0)}$$

e cioè:

$$\cos \vartheta' = \frac{(\cos \vartheta - 1)(1 - \beta^2) + (1 - \beta a)(1 - \beta a_0)}{(1 - \beta a)(1 - \beta a_0)}$$

da cui si ricava facilmente:

$$1 - \cos \vartheta' = (1 - \cos \vartheta) \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta a)(1 - \beta a_0)} \tag{3,6}$$

Per giungere nella maniera più semplice ai trasformati del modulo del vettore di Poynting e del $\cos \Theta'$, è opportuno ricavare le formule con cui si trasformano le ampiezze delle componenti E ed H del campo elettromagnetico. Facendo uso delle formule (2,5) e (2,6) si ricava:

$$E'^2 = E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2 = E_x^2 + \frac{E_y^2 + E_z^2 - 2\beta(E_y H_z - E_z H_y) + \beta^2 (H_y^2 + H_z^2)}{1-\beta^2}.$$

Se adesso si tiene conto che nel vuoto campo elettrico e campo magnetico hanno la stessa intensità, e che, insieme colla direzione di propagazione della radiazione, formano una terna ortogonale, (proprietà questa che è relativisticamente invariante), la formula trovata può scriversi semplicemente:

$$E' = E \frac{(1-\beta a)}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \tag{3,7}$$

ed analogamente:

$$E_0' = E_0 \frac{(1-\beta a_0)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad H' = H \frac{(1-\beta a)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad H_0' = H_0 \frac{(1-\beta a_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Segue subito la espressione per il trasformato del modulo del vettore di Poynting:

$$I' = \frac{c}{4\pi} E'^2 = \frac{c}{4\pi} E^2 \frac{(1-\beta a)^2}{(1-\beta^2)} = I \frac{(1-\beta a)^2}{(1-\beta^2)} \tag{3,8}$$

ed analogamente:

$$I_0' = I_0 \frac{(1-\beta a_0)^2}{(1-\beta^2)}.$$

Per ottenere infine la maniera con cui varia cos Θ', ci baseremo sulla invarianza relativistica del prodotto scalare (e quindi della ortogonalità). Facendo il prodotto scalare dei due tensori emisimmetrici in Σ' (o se si preferisce dei due esavettori)

$$\begin{matrix} 0 & H_{0z} & -H_{0y} & E_{0x} \\ -H_{0z} & 0 & H_{0x} & E_{0y} \\ H_{0y} & -H_{0x} & 0 & E_{0z} \\ -E_{0x} & -E_{0y} & -E_{0z} & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & H_z & -H_y & E_x \\ -H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{matrix} \tag{3,9}$$

e quello dei corrispondenti tensori in Σ', per la citata invarianza si ottiene:

$$(H' H_0' - E' E_0') \cos \Theta' = (H H_0 - E E_0) \cos \Theta \tag{3,10}$$

Trasformando ora le componenti del campo elettromagnetico mediante le (3,7), si arriva alla formula cercata:

$$\cos \Theta' = \cos \Theta \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta a)(1-\beta a_0)}. \tag{3,11}$$

4. FORMULE PER LO SCATTERING. – Facendo uso dei resultati (3,3) e (3,8), la frequenza ed il modulo del vettore di Poynting, per la radiazione di scattering osservata in Σ, si possono ricavare dalle seguenti relazioni:

$$k = k' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta a} \tag{4,1}$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}' \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta a)^2} \tag{4,2}$$

nelle quali I′ e k' hanno le espressioni (2,9) e (2,8). Le formule così ottenute contengono però molte grandezze con apice che non sono accessibili alla diretta esperienza dell'osservatore. Conviene eliminarle ed esprimerle mediante elementi senza apice, ciò che può farsi facilmente usando gli altri resultati (3,2), (3,3), (3,6) e (3,11). Si ottengono così le formule cercate:

$$k = k_0 \frac{(1-\beta a_0)}{(1-\beta a)} \frac{mc^2}{mc^2 + \dfrac{k_0 (1-\cos\vartheta)\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta a)}} \tag{4,3}$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4} \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{\mathrm{I}_0}{r^2} \left(\frac{k}{k_0}\right)^3 \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2 \sin^2 \alpha)} \left(\frac{1-\beta a}{1-\beta a_0}\right) \left\{ \frac{k_0 (1-\beta a_0)}{k(1-\beta a)} + \frac{k(1-\beta a)}{k_0(1-\beta a_0)} - 2 + \frac{4\cos^2\Theta\,(1-\beta^2)^2}{(1-\beta a)^2 (1-\beta a_0)^2} \right\} \tag{4,4}$$

Nella seconda parte di questo lavoro ricaveremo per la intensità e per la frequenza della radiazione di scattering alcune formule approssimate utili in vista di future applicazioni.

BIBLIOGRAFIA.

[1] V. A. AMBARTSUMYAN, *Theoretical Astrophysics*, Pergamon Press, London (1958).
[2] B. J. O'BRIEN, J. A. VAN ALLEN, C. D. LAUGHLIN e L. A. FRANK, *Absolute Electron Intensities in the Heart of the Earth's outer Radiation Zone*, « Journal of Geophysical Research », *67*, 1 (January 1962).
[3] O. KLEIN e Y. NISHINA, *Ueber die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativislischen Quantendynamik von Dirac*, « Zs. f. Phys. », *52*, 853 (1929) ed anche: Y. NISHINA, *Die Polarisation der Compton Streung nach der Diracschen Theorie des Elektrons*, ibid., *52*, 869 (1929).
[4] A. H. COMPTON, *A Quantum Theory of the Scattering of X-Rays by light Elements*, « Physical Review », *21*, 483 (1923).
[5] A. EINSTEIN, *Zur Elektrodynamik bewegter Korper*, « Ann. d. Phys. », *17*, 891–921 (1905).
[6] G. TORALDO DI FRANCIA, *Lezioni di elettrodinamica e radiazione*, Università degli Studi di Firenze, 1962.
[7] R. C. TOLMAN, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Clarendon Press, Oxford 1946.
[8] W. HEITLER, *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford University Press.