Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ario Romiti

Sulla stabilità asintotica in grande di una classe di sistemi non lineari di regolazione automatica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.1-2, p. 59–65.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_1-2_59_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Meccanica. — *Sulla stabilità asintotica in grande di una classe di sistemi non lineari di regolazione automatica.* Nota (*) di ARIO ROMITI, presentata dal Corrisp. C. FERRARI.

1. INTRODUZIONE. – Il presente studio si riferisce ai sistemi di regolazione aventi un termine non lineare, in cui la grandezza di uscita ha sempre lo stesso segno della grandezza di entrata.

Un'ampia classe di non linearità rientra in questa categoria; ne fanno parte ad esempio quelle dovute a relé, a giochi, a saturazione, a curvatura della caratteristica di risposta.

Il problema esaminato è quello della ricerca delle condizioni che devono essere soddisfatte perché il sistema di regolazione considerato sia stabile asintoticamente, per deviazioni comunque grandi dalle sue condizioni di equilibrio.

Il problema è stato affrontato organicamente per la prima volta da A. I. Lur'e [1], che stabilì delle condizioni sufficienti per la stabilità asintotica in grande del sistema di regolazione, collegate all'esistenza di soluzioni reali di un certo sistema di equazioni algebriche di secondo grado. Il numero di queste equazioni è uguale a quello delle equazioni differenziali del primo ordine che descrivono la parte lineare del sistema di regolazione.

La complicazione della ricerca cresce rapidamente con questo numero, sia per le difficoltà insite nella discussione delle equazioni algebriche, sia per l'onere della ricerca dei valori dei coefficienti di tali equazioni.

Lur'e diede una soluzione del problema per sistemi di regolazione descritti da un massimo di quattro equazioni del primo ordine. In seguito Rozenvasser [2] trovò una soluzione anche quando tali equazioni sono cinque od, in un caso molto particolare, sei.

Il presente lavoro ha lo scopo di semplificare radicalmente la ricerca dei coefficienti delle equazioni algebriche che risolvono il problema della stabilità. Per ottenere questo risultato, ho ripreso in esame il sistema fisico della cui stabilità si tratta.

Un sistema di regolazione automatica è sempre a circuito chiuso. È chiaro che si può calcolare in modo elementare la funzione di trasferta globale dei blocchi lineari, che costituiscono la parte di circuito compresa tra i terminali dell'elemento non lineare, conoscendo le funzioni di trasferta parziali dei vari blocchi, comunque essi siano disposti.

La posizione, in tale circuito, dei punti di introduzione e di estrazione dei segnali scambiati con l'esterno, non ha alcuna importanza, perché il

(*) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1962.

sistema deve, per lo studio della stabilità, essere considerato isolato rispetto ai segnali scambiati con l'esterno.

Poiché il termine non lineare è uno solo, il sistema è rappresentabile da uno schema a blocchi comprendente, in serie, la parte lineare e quella non lineare.

Si possono ora considerare come dati del problema la funzione di trasferta della parte lineare e la curva di risposta della parte non lineare.

Le equazioni differenziali che descrivono un tal sistema di regolazione nella forma più semplice hanno coefficienti uguali in valore a quelli che compaiono nella funzione di trasferta. Queste equazioni, pur apparendo formalmente un caso particolare estremamente semplice di quelle di Lur'e, ne hanno lo stesso grado di generalità, come è qui dimostrato.

Ho poi potuto ricavare anche i coefficienti delle equazioni algebriche risolutive direttamente per mezzo dei coefficienti della funzione di trasferta globale della parte lineare del sistema di regolazione, Inoltre, ho potuto esprimere tali coefficienti in forma ricorrente, in modo da renderli ricavabili qualunque sia il numero delle equazioni che descrivono il sistema; infine, ho fatto scomparire dai « termini noti » delle equazioni risolutive i valori delle radici del determinante caratteristico del sistema di equazioni differenziali di partenza, valori difficilmente calcolabili appena tali equazioni sono più di due.

2. LE EQUAZIONI RISOLUTIVE DEL PROBLEMA SECONDO IL METODO DI LUR'E. – Si consideri un sistema di regolazione descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \eta_j + h_i f(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i \eta_i \tag{2}$$

in cui è sempre:

$$xf(x) > 0 . \tag{3}$$

Sia D (λ) il determinante caratteristico della parte lineare del sistema (1), ossia:

$$\mathrm{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \tag{4}$$

$$= (-\lambda)^n + d_1 (-\lambda)^{n-1} + \cdots + d_{n-1} (-\lambda) + d_n$$

Lur'e ha dimostrato che, perché il sistema (1), (2) sia stabile, è sufficiente che:

1° le n soluzioni λ_r di D $(\lambda) = 0$ abbiano tutte parte reale negativa;

2° un certo sistema di equazioni algebriche di secondo grado abbia un gruppo di soluzioni reali.

Queste equazioni sono le seguenti:

$$(5) \qquad -2\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s \sum_{i=1}^{n} z_i \sigma_{2k-s+n-i} \sum_{j=1}^{n} z_j \sigma_{s+n-j} -$$

$$-(-1)^k\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \sigma_{k+n-i}\right)^2 + \sum_{r=1}^{n} \gamma_r \lambda_r^{2k+1} = 0\,;$$

$$(6) \qquad -2\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^s \sum_{i=1}^{n} z_i \sigma_{-2k+s-1+n-i} \sum_{j=1}^{n} z_j \sigma_{-s-1+n-j} -$$

$$-(-1)^k\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \sigma_{-k-1+n-i}\right)^2 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\gamma_r}{\lambda_r^{2k+1}} = 0$$

ove k è un numero intero, e le incognite sono chiamate z.

Dalle (5), (6) si debbono trarre, variando ogni volta k, un numero di equazioni uguale al numero n delle equazioni (1).

I coefficienti γ_r valgono:

$$(7) \qquad \gamma_r = -\sum_{s=1}^{n} b_s \frac{H_s(\lambda_r)}{D'(\lambda_r)}$$

ove $D'(\lambda)$ è la derivata di $D(\lambda)$ rispetto a λ, e $H_s(\lambda_r)$ è il determinante ottenuto sostituendo la essesima colonna della matrice di $D(\lambda_r)$ con la colonna formata dagli n elementi h_i.

I coefficienti σ_i valgono:

$$(8) \qquad \sigma_i = \sum_{r=1}^{n} \frac{\lambda_r^i}{D'(\lambda_r)}\,.$$

Lur'e ha calcolato esplicitamente alcuni valori di σ_i, e precisamente:

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\sigma_i = 0 \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ &\sigma_{n-1} = (-1)^n \quad ; \quad \sigma_n = (-1)^n d_1 \\ &\sigma_{n+1} = (-1)^n (d_1^2 - d_2) \\ &\sigma_{n+2} = (-1)^n (d_1^3 - 2 d_1 d_2 + d_3) \\ &\sigma_{n+3} = (-1)^n (d_1^4 - 3 d_1^2 d_2 + 2 d_1 d_3 + d_2^2 - d_4) \end{aligned}$$

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\sigma_{-1} = -\frac{1}{d_n} \quad ; \quad \sigma_{-2} = -\frac{d_{n-1}}{d_n^2} \\ &\sigma_{-3} = \frac{d_{n-2}}{d_n^2} - \frac{d_{n-1}^2}{d_n^3} \\ &\sigma_{-4} = -\frac{d_{n-3}}{d_n^2} + 2\frac{d_{n-1} d_{n-2}}{d_n^3} - \frac{d_{n-1}^3}{d_n^4}\,. \end{aligned}$$

3. Il sistema di regolazione nel più semplice schema. – Consideriamo un sistema di regolazione a circuito chiuso; lo studio della stabilità viene effettuato esaminando il comportamento dei segnali circolanti in tale circuito.

Lo schema a blocchi del sistema è sempre riducibile a quello di fig. 1:

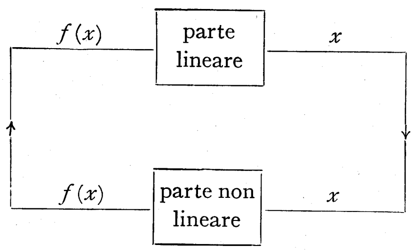

Fig. 1.

La curva di risposta della parte non lineare del sistema di regolazione sia descritta da una funzione nota $f(x)$.

La parte lineare sia descritta da una funzione di trasferta $W(p)$ pure nota:

$$W(p) = \frac{\mathfrak{L}\{x\}}{\mathfrak{L}\{f(x)\}} \tag{11}$$

ove $\mathfrak{L}$ è il simbolo delle trasformate di Laplace.

Il sistema di regolazione rappresentato in fig. 1 può anche essere descritto dal seguente sistema di n equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{y}_k = y_{k+1} & (k = 1, 2, \cdots, n-1) \\ \dot{y}_n = -\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + f(x) \end{cases} \tag{12}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i . \tag{13}$$

Infatti dalle (12), (13) si ottiene subito, risolvendo in funzione di $\mathfrak{L}\{y_1\}$, ed indicando con p l'operatore differenziale rispetto al tempo:

$$\mathfrak{L}\{x\} = (b_n p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \cdots + b_1)\, \mathfrak{L}\{y_1\} \tag{14}$$

$$\mathfrak{L}\{f(x)\} = (p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_1)\, \mathfrak{L}\{y_1\} . \tag{15}$$

Dividendo membro a membro le (14) e (15) si ottiene la seguente espressione di $W(p)$:

$$W(p) = \frac{\mathfrak{L}\{x\}}{\mathfrak{L}\{f(x)\}} = \frac{b_n p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \cdots + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_1} . \tag{16}$$

Il sistema (12), (13) è ovviamente un caso particolarmente semplice del sistema (1), (2). È però possibile dimostrare che, con un opportuno cambiamento di variabili, quest'ultimo sistema può sempre essere trasformato nel primo.

Si ponga:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i \eta_i = y_1$$

ove i coefficienti θ_i sono per ora incogniti. Si ha, dalla (1):

$$\dot{y}_1 = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \dot{\eta}_i = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \left[\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \eta_j + h_i f(x) \right].$$

Si ponga ora:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i h_i = 0$$

$$\dot{y}_1 = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \eta_j = y_2 ,$$

da cui:

$$\dot{y}_2 = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \left[\sum_{k=1}^{n} c_{ik} \eta_k + h_j f(x) \right].$$

Procedendo nello stesso modo, si annullano sempre i coefficienti di $f(x)$, e si pongono le $\dot{y}_k = y_{k+1}$, salvo che nell'ultima equazione, in cui il coefficiente di $f(x)$ è posto uguale ad uno. Si ottengono così n equazioni lineari non omogenee da cui è possibile ricavare le θ_i:

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \theta_{i_1} c_{i_1 i_2} c_{i_2 i_3} \cdots c_{i_{m-1} i_m} h_{i_m} = \begin{cases} 0 , & \text{per} \quad m < n \\ 1 , & \text{per} \quad m = n . \end{cases}$$

Le equazioni differenziali (1) si trasformano nelle:

$$\dot{y}_{i_m} = y_{i_{m+1}} , \qquad \text{per} \quad m < n$$

$$\dot{y}_{i_n} = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{n} \theta_{i_1} c_{i_1 i_2} c_{i_2 i_3} \cdots c_{i_n i_{n+1}} \eta_{i_{n+1}} + f(x)$$

completamente equivalenti alle (12), in quanto le variabili η_i sono combinazioni lineari delle y_i:

$$y_{i_m} = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \theta_{i_1} c_{i_1 i_2} c_{i_2 i_3} \cdots c_{i_{m-1} i_m} \eta_{i_m} .$$

Per lo stesso motivo, la (2) è equivalente alla (13).

Per descrivere i sistemi di regolazione saranno quindi adottate in seguito, in luogo delle equazioni (1), (2), le altrettanto generali (12), (13), perché i concreti sistemi di regolazione si presentano normalmente sotto la forma di fig. 1 (la funzione di trasferta globale è facilmente calcolabile mediante prodotti delle funzioni di trasferta degli elementi in serie e somme di quelle degli elementi in parallelo, ed è anche rilevabile sperimentalmente). Per schematizzare i sistemi secondo le (1), (2) occorrono invece calcoli complicati per determinare i coefficienti, dati gli elementi fisici del circuito di regolazione.

4. ESPRESSIONE DELLE EQUAZIONI RISOLUTIVE MEDIANTE I COEFFICIENTI DELLA FUNZIONE DI TRASFERTA DELLA PARTE LINEARE DEL SISTEMA DI REGOLAZIONE. – Consideriamo il determinante caratteristico $D(\lambda)$ del sistema (12):

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_n-\lambda \end{vmatrix} = \tag{17}$$

$$= (-1)^n [\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \cdots + a_{k+1} \lambda^k + \cdots + a_2 \lambda + a_1] .$$

Confrontando la (17) con la (4) risulta subito:

$$d_{n-k} = (-1)^{n-k} a_{k+1} . \tag{18}$$

Tenendo conto della (8), e chiamando:

$$(-1)^n \sigma_i = \bar{\sigma}_i \tag{19}$$

le espressioni dei coefficienti $\bar{\sigma}_i$ possono essere scritte in forma ricorrente come segue:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i &= 0 \qquad\qquad \text{per} \quad i = 0, 1, \cdots, n-2 \\ \bar{\sigma}_{n-1} &= 1 \\ \bar{\sigma}_n &= -(a_n \bar{\sigma}_{n-1}) \\ \bar{\sigma}_{n+1} &= -(a_n \bar{\sigma}_n + a_{n-1} \bar{\sigma}_{n-1}) \\ \bar{\sigma}_{n+2} &= -(a_n \bar{\sigma}_{n+1} + a_{n-1} \bar{\sigma}_n + a_{n-2} \bar{\sigma}_{n-1}) \qquad \text{ecc.} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{-1} &= -\frac{1}{a_1} \\ \bar{\sigma}_{-2} &= -\frac{1}{a_1}(a_2 \bar{\sigma}_{-1}) \\ \bar{\sigma}_{-3} &= -\frac{1}{a_1}(a_2 \bar{\sigma}_{-2} + a_3 \bar{\sigma}_{-1}) \\ \bar{\sigma}_{-4} &= -\frac{1}{a_1}(a_2 \bar{\sigma}_{-3} + a_3 \bar{\sigma}_{-2} + a_4 \bar{\sigma}_{-1}) \qquad \text{ecc.} \end{aligned} \tag{21}$$

Si può notare nelle (5), (6), che i coefficienti σ_i compaiono solo sotto forma di quadrati e doppi prodotti; se ne deduce, per l'uguaglianza $\sigma_i \sigma_j = \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j$, che in tali equazioni è possibile sostituire le $\bar{\sigma}_i$ alle σ_i.

Per eliminare poi dalle (5), (6) i valori delle radici λ_r, ed esprimerli in funzione dei coefficienti di $W(p)$, si può procedere nel modo seguente.

Si ricava anzitutto l'espressione del determinante $H_s(\lambda_r)$ nel caso presente. Per far ciò si sostituisce all'essesima colonna della matrice di formula (17) la colonna avente tutti gli elementi h_i nulli, salvo l'ultimo uguale ad uno. Risulta:

$$H_s(\lambda_r) = (-1)^{n-1} \lambda_r^{s-1}. \tag{22}$$

La (7) diviene quindi ora:

$$\gamma_r = -\sum_{s=1}^{n} b_s \frac{H_s(\lambda_r)}{D'(\lambda_r)} = (-1)^n \sum_{s=1}^{n} b_s \frac{\lambda_r^{s-1}}{D'(\lambda_r)} \tag{23}$$

e perciò i «termini noti» delle equazioni (5), (6) valgono rispettivamente:

$$\sum_{r=1}^{n} \gamma_r \lambda_r^{2k+1} = (-1)^n \sum_{s=1}^{n} b_s \sum_{r=1}^{n} \frac{\lambda_r^{2k+s}}{D'(\lambda_r)} \tag{24}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \gamma_r \lambda_r^{-(2k+1)} = (-1)^n \sum_{s=1}^{n} b_s \sum_{r-1}^{n} \frac{\lambda_r^{s-2k-2}}{D'(\lambda_r)}\,. \tag{25}$$

Tenendo conto delle (8) e (19), queste espressioni divengono:

$$\sum_{r=1}^{n} \gamma_r \lambda_r^{2k+1} = (-1)^n \sum_{s=1}^{n} b_s \sigma_{2k+s} = \sum_{s=1}^{n} b_s \bar{\sigma}_{2k+s} \tag{26}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \gamma_r \lambda_r^{-(2k+1)} = (-1)^n \sum_{s=1}^{n} b_s \sigma_{s-2k-2} = \sum_{s=1}^{n} b_s \bar{\sigma}_{s-2k-2}\,. \tag{27}$$

Le equazioni (5) e (6) nelle n incognite z possono ora completamente esprimersi mediante i coefficienti della $W(p)$, che sono quantità note, caratteristiche degli elementi fisici del sistema.

Lo studio delle condizioni sufficienti di stabilità in forma esplicita per diversi sistemi di regolazione sarà affrontato in un successivo lavoro.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. I. LUR'E, *Alcuni problemi non lineari della teoria della regolazione automatica*, trad. tedesca, Akademie Verlag, 1957.

[2] E. N. ROZENVASSER, *Sulla stabilità di sistemi non lineari di controllo descritti da equazioni differenziali del 5° e 4° ordine*, «Avtomatika i Telemekhanika», *2* (1958).

[3] I. G. MALKIN, *Teoria della stabilità del moto*, trad. inglese, U. S. Atomic Energy Commission, tr-3352.

[4] E. P. POPOV, *Dinamica della regolazione automatica*, trad. tedesca, Akademie Verlag, 1958.

[5] F. R. GANTMAKHER, *Applicazioni della teoria delle matrici*, trad. inglese, Interscience Publishers, 1959.